国家教材委员会专家委员会审核通过 2024

义务教育教科书

数学

七年级

下册

人民教育出版社

人民教育出版社

义务教育教科书

数学

七年级

下册

人民教育出版社 课程教材研究所 编著

人民教育出版社
·北京·

人民教育出版社

顾　　问：林　群　田　刚
主　　编：王长平
执行主编：李海东
分册主编：宋莉莉

编写人员：（以姓氏笔画为序）
刘　达　孙　锋　宋莉莉　张　伟
张文韬　陆志强　崔佳佳　薛　彬

责任编辑：王翠巧
责任设计：王俊宏
责任校对：王　苗
责任印制：

义务教育教科书　数学　七年级　下册
人民教育出版社　课程教材研究所　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

致同学

亲爱的同学，新的学期开始了. 在本学期的数学学习中，我们将要学习哪些内容？快来了解一下吧.

“相交线与平行线”将学习平面内的两条相交直线和平行直线，你将通过直观想象、操作确认、推理论证等方法，得出它们的性质，初步体会通过推理获得数学结论的方法，培养言之有据的思考习惯；你还将在小学学习的基础上，进一步学习平移这种图形变化，经历探究图形变化规律的过程.

在**“实数”**中，你将认识一类新的数——无理数. 有了无理数，数的范围将从有理数扩充到实数. 你还将学习用数轴上的点表示实数，体会实数与数轴上的点的一一对应关系，从而借助几何直观理解实数.

“平面直角坐标系”将为你建立平面内的点与有序数对之间的联系，这样你就可以用数和运算研究图形，用图形表示数和运算结果了，这将有利于增强你的几何直观.

对于要求两个未知数的实际问题，**“二元一次方程组”**将带你列出含有两个未知数的一次方程组表示其中的相等关系，并通过解方程组获得实际问题的答案. 通过类比等式、一元一次方程学习**“不等式与不等式组”**，你将对不等关系有新的认识，并进一步学习不等式的性质和解法. 这些内容的学习有助于你抽象能力、运算能力、模型观念和应用意识的提升.

在现实世界中，人们经常需要根据信息作出合理决策，这就要用到统计学知识. 在**“数据的收集、整理与描述”**中，你将学习统计学中收集和整理数据的常用方法，你还将学习如何用图表直观地描述数据，培养数据观念.

此外，综合与实践**“低碳生活”**将带你了解“碳达峰”“碳中和”，计算生活中的“碳足迹”，设计自己的低碳生活行动方案；**“白昼时长规律的探究”**将带你探究不同地区白昼时长的变化规律，进一步认识和理解现实世界.

数学伴着我们成长，数学伴着我们进步，数学伴着我们成功. 让我们扬帆起航，开启一段新的数学之旅吧！

目　　录

人民教育出版社

第七章　相交线与平行线

你对两条直线相交、平行一定不陌生吧！菜园篱笆上交叉的竹竿，笔直的公路上的车行道线，大桥的吊索、钢梁上的钢条，棋盘中的横线和竖线，教室里课桌面、黑板面相邻的两条边与相对的两条边……都给我们以相交线或平行线的形象. 你能再举出一些相交线和平行线的实例吗？

在上一章中，我们认识了几何图形，并学习了一些基本的平面图形——直线、射线、线段和角. 本章我们将学习平面内不重合的两条直线的位置关系：相交与平行. 对于相交，要研究两条直线相交所成的角的位置关系和数量关系；对于平行，要借助一条直线与另外两条直线相交所成的角，研究平行线的判定和性质. 在此基础上，还要学习图形的平移等. 在本章中获得的知识，是后面学习三角形、四边形等平面图形的基础.

在本章中，我们还将学习通过简单的推理得出数学结论的方法，逐步养成言之有据的思考习惯.

7.1 相交线

在上一章中，我们认识了相交线，知道相交是直线之间的一种基本位置关系，如何刻画这种位置关系呢？本节我们借助直线相交所成的角的位置关系和数量关系，研究相交线.

7.1.1 两条直线相交

如图 7.1-1，取两根木条 a，b，将它们钉在一起，并把它们想象成两条直线，就得到一个相交线的模型. 在转动木条的过程中，它们所成的角也在变化，你能发现这些角之间不变的关系吗？

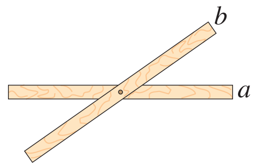


图 7.1-1

探究

任意画两条相交的直线，形成四个角（图 7.1-2），$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有怎样的位置关系？$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 呢？

分别量一下各个角的度数，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数有什么关系？$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 呢？

利用信息技术工具，改变两条直线相交所成的角的大小，上述关系还保持吗？为什么？

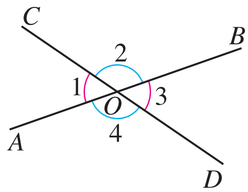


图 7.1-2

$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有一条公共边 OC，它们的另一边互为反向延长线（$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互补），具有这种位置关系的两个角，互为**邻补角**.

$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 有一个公共顶点 O，并且 $\angle 1$ 的两边分别是 $\angle 3$ 的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为**对顶角**.

图 7.1-2 中还有没有其他邻补角与对顶角？

在图 7.1-2 中，$\angle 1=\angle 3$. 这个结论还可以通过补角的性质得到：$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 3$ 与 $\angle 2$ 互补，由“同角的补角相等”，可得 $\angle 1=\angle 3$. 类似地，可得 $\angle 2=\angle 4$. 这样，可以得到对顶角的性质：

对顶角相等.

上面推出“对顶角相等”这个结论的过程，可以写成下面的形式：

人民教育出版社

因为　∠1 与∠2 互补，∠3 与∠2 互补，

所以　∠1=∠3（同角的补角相等）.

例 1　如图 7.1-3，直线 a，b 相交，∠1=40°，求∠2，∠3，∠4 的度数.

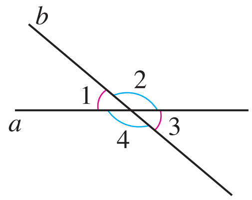


图 7.1-3

解： 由∠1 和∠2 互为邻补角，得

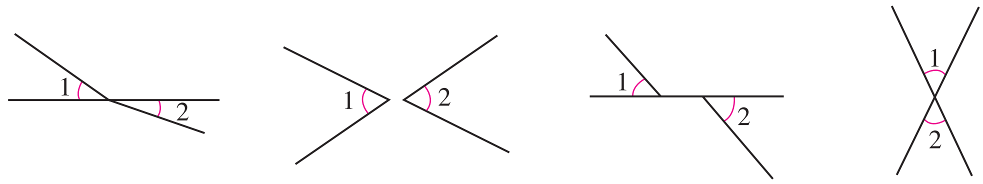
$$\angle 2=180^\circ-\angle 1=180^\circ-40^\circ=140^\circ.$$

由对顶角相等，得

$$\angle 3=\angle 1=40^\circ,\ \angle 4=\angle 2=140^\circ.$$

练习

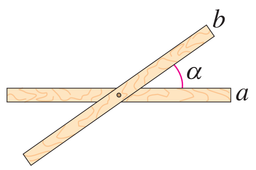
1. 在下列各图中，∠1 和∠2 是不是对顶角？



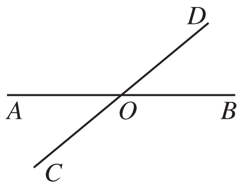
（1）　（2）　（3）　（4）

（第 1 题）

2. 如图，在相交线的模型中，如果两根木条 a，b 所成的角中有一个角 $\angle\alpha=35^\circ$，其他三个角分别等于多少度？如果 $\angle\alpha$ 等于 90°，115°，m°呢？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOC : \angle BOC=2 : 7$，则 $\angle BOC=$________°，$\angle AOD=$________°.

7.1.2　两条直线垂直

垂直是相交的一种特殊情形. 在相交线的模型（图 7.1-1）中，固定木条 a，转动木条 b. 当 b 的位置变化时，a，b 所成的 $\angle\alpha$ 也会发生变化. 当 $\angle\alpha=90^\circ$

时（图 7.1-4），这两根木条垂直.

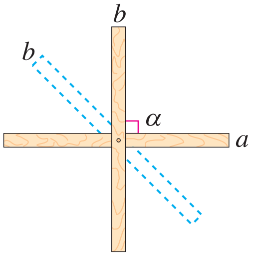


图 7.1-4

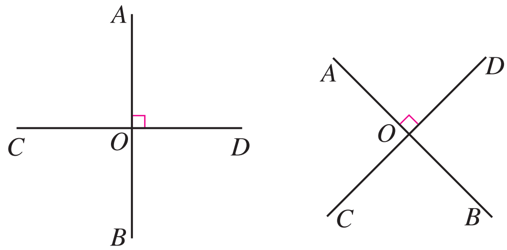


图 7.1-5

一般地，当两条直线 a，b 相交所成的四个角中，有一个角是直角时，我们说 a 与 b 互相**垂直**（perpendicular），记作“$a\perp b$”.

两条直线互相垂直，其中的一条直线叫作另一条直线的**垂线**，它们的交点叫作**垂足**. 在图 7.1-5 中，$AB\perp CD$，垂足为 O.

由上可知，如果两条直线相交所成的四个角中有一个角等于 $90°$，那么这两条直线互相垂直. 在图 7.1-5 中，如果直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOD=90°$，那么 $AB\perp CD$. 这个推理过程可以写成下面的形式：

因为 $\quad\angle AOD=90°$，

所以 $\quad AB\perp CD$.

反过来，如果 $AB\perp CD$，那么 $\angle AOD$ 是多少度？写出这个推理过程.

在日常生活中，两条直线互相垂直的情形很常见，例如图 7.1-6 中窗户上互相垂直的木条、网球拍上互相垂直的网线. 你能再举出其他例子吗？

图 7.1-6

接下来我们研究互相垂直的两条直线的性质.

探究

如图 7.1-7，用三角尺或量角器画已知直线 l 的垂线.

（1）经过直线 l 上一点 A 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

（2）经过直线 l 外一点 B 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

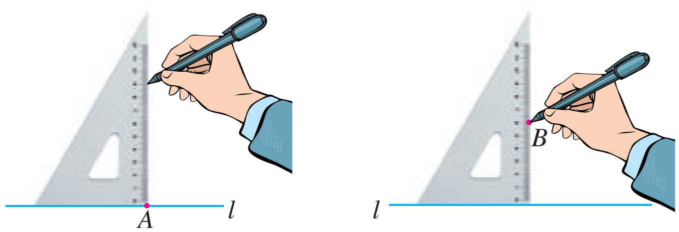
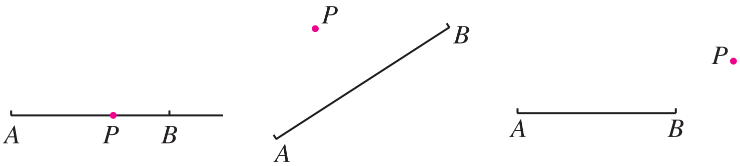


图 7.1-7

可以发现，经过一点（在已知直线上或直线外），能画出已知直线的一条垂线，并且只能画出一条垂线. 由此得到关于垂线的基本事实：

在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

例 2 如图 7.1-8，过点 P 画出射线 AB 或线段 AB 的垂线.

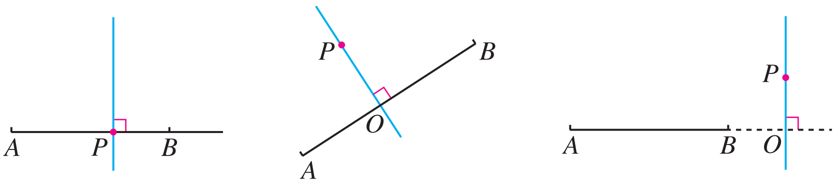


（1）　（2）　（3）

图 7.1-8

画一条射线或线段的垂线，就是画它们所在直线的垂线.

解： 如图 7.1-9 所示.



（1）　（2）　（3）

图 7.1-9

我们再来研究互相垂直的两条直线的另一个性质.

思考

如图 7.1-10，在灌溉时，要把河中的水引到农田 P 处，如何挖渠能使渠道最短?

图 7.1-10

探究

如图 7.1-11，P 是直线 l 外一点，$PO\perp l$，垂足为 O，我们称 PO 为点 P 到直线 l 的垂线段. A 是直线 l 上除点 O 外一点，连接 PA. 测量并比较线段 PO 与 PA 的长度，你能得到什么结论? 改变点 A 的位置呢?

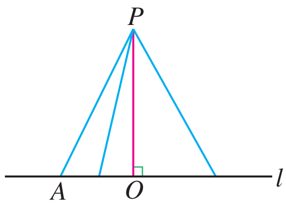


图 7.1-11

你也可以利用信息技术工具，在直线 l 上拖动点 A，改变点 A 的位置，探究 PO 与 PA 的长度关系.

可以发现，**连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.**

简单说成：**垂线段最短.**

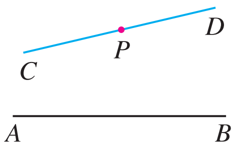
直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫作**点到直线的距离**.

对于图 7.1-10，现在你知道如何挖渠能使渠道最短了吗?

练习

1. 当两条直线相交所成的四个角都相等时，这两条直线有什么位置关系? 为什么?

2. 如图，分别过点 P 画直线 AB，CD 的垂线，并量出点 P 到直线 AB 的距离.

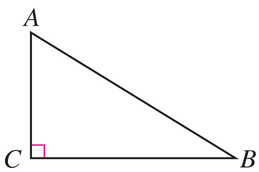


（第 2 题）

3. 如图，在三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

（1）分别指出点 A 到直线 CB，点 B 到直线 AC 的距离是哪些线段的长度；

（2）三条边 AB，AC，CB 中哪条边最长? 为什么?



（第 3 题）

7.1.3　两条直线被第三条直线所截

前面我们研究了一条直线与另一条直线相交的情形，接下来，我们进一步研究同一平面内一条直线与两条直线分别相交的情形.

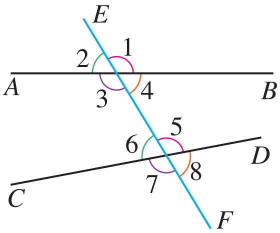


图 7.1-12

如图 7.1-12，直线 AB，CD 与 EF 相交（也可以说两条直线 AB，CD 被第三条直线 EF 所截），构成八个角. 我们已经学习了有公共顶点的角的关系，下面我们看那些没有公共顶点的两个角的关系.

先看图 7.1-12 中的$\angle 1$和$\angle 5$，这两个角分别在直线 AB，CD 的同一侧（上方），并且都在直线 EF 的同侧（右侧），具有这种位置关系的一对角叫作**同位角**.

> $\angle 2$和$\angle 6$是同位角吗？图 7.1-12 中还有没有其他同位角？若有，标记出它们.

再看$\angle 3$和$\angle 5$，这两个角都在直线 AB，CD 之间，并且分别在直线 EF 的两侧（$\angle 3$在直线 EF 的左侧，$\angle 5$在直线 EF 的右侧），具有这种位置关系的一对角叫作**内错角**. $\angle 3$和$\angle 6$虽然也都在直线 AB，CD 之间，但是它们在直线 EF 的同一旁（左侧），具有这种位置关系的一对角叫作**同旁内角**.

> 图 7.1-12 中还有没有其他内错角与同旁内角？若有，标记出它们.

例 3　如图 7.1-13，直线 DE，BC 被直线 AB 所截.

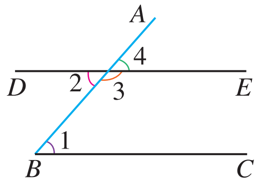


图 7.1-13

（1）$\angle 1$和$\angle 2$，$\angle 1$和$\angle 3$，$\angle 1$和$\angle 4$各是什么位置关系的角？

（2）如果$\angle 1=\angle 4$，那么$\angle 1$和$\angle 2$相等吗？$\angle 1$和$\angle 3$互补吗？为什么？

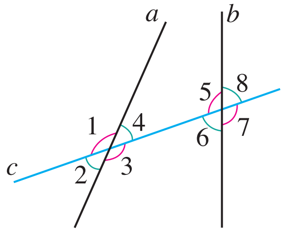
解：（1）$\angle 1$和$\angle 2$是内错角，$\angle 1$和$\angle 3$是同旁内角，$\angle 1$和$\angle 4$是同位角.

（2）如果$\angle 1=\angle 4$，又由对顶角相等，可得$\angle 2=\angle 4$，因此$\angle 1=\angle 2$.

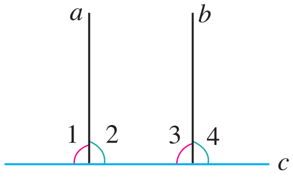
因为$\angle 4$和$\angle 3$互补，所以$\angle 4+\angle 3=180°$. 又因为$\angle 1=\angle 4$，所以$\angle 1+\angle 3=180°$，即$\angle 1$和$\angle 3$互补.

练习

1. 分别指出下列各图中的同位角、内错角、同旁内角.

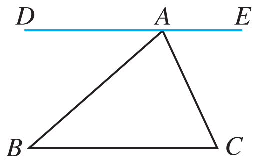


（1）



（2）

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\angle B$ 与哪个角是内错角？与哪个角是同旁内角？它们分别是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？对 $\angle C$ 进行同样的讨论.

习题 7.1

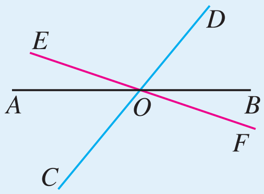
复习巩固

1. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O.

   （1）写出 $\angle AOC$，$\angle BOE$ 的邻补角；

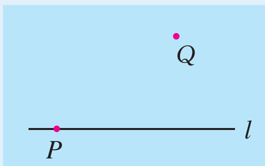
   （2）写出 $\angle DOA$，$\angle EOC$ 的对顶角；

   （3）如果 $\angle AOC=50^\circ$，求 $\angle BOD$，$\angle COB$ 的度数.



（第 1 题）

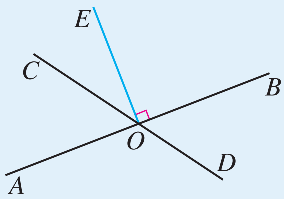
2. 如图，在一张半透明的纸上画一条直线 l，在 l 上任取一点 P，在 l 外任取一点 Q，折出过点 P 且与 l 垂直的直线. 这样的直线能折出几条？为什么？过点 Q 呢？



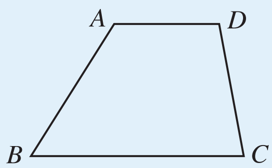
（第 2 题）

3. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO\perp AB$，垂足为 O，$\angle EOC=35^\circ$. 求 $\angle AOD$ 的度数.

4. 如图，画 $AE\perp BC$，$CF\perp AD$，垂足分别为 E，F.



（第 3 题）



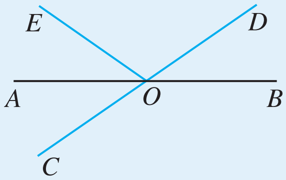
（第 4 题）

综合运用

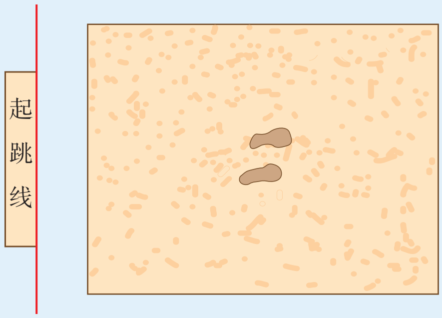
5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分 $\angle EOC$.

(1) 若 $\angle EOC=70°$，求 $\angle BOD$ 的度数；

(2) 若 $\angle EOC:\angle EOD=2:3$，求 $\angle BOD$ 的度数.



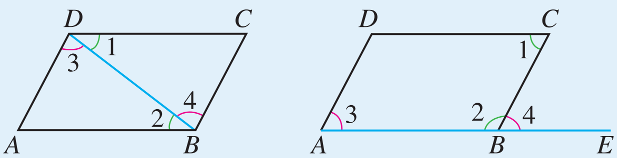
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，这是李明同学在体育课上跳远后留下的脚印，他的跳远成绩是多少（比例尺为 $1:160$）？

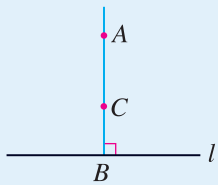
7. 如图，$\angle 1$ 和 $\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？它们各是什么位置关系的角？



（第 7 题）

拓广探索

8. 如图，$AB\perp l$，$CB\perp l$，B 为垂足，那么 A，B，C 三点在同一条直线上吗？请说明理由.



（第 8 题）

9. 直线 AB，CD 相交于点 O.

(1) OE，OF 分别是 $\angle AOC$，$\angle BOD$ 的平分线. 画出这个图形.

(2) 射线 OE，OF 在同一条直线上吗？为什么？

观察与猜想

看图时的错觉

观察以下图形，并回答提出的问题.

1. 图 1 每组中的线段 a 与 b 哪一条长?

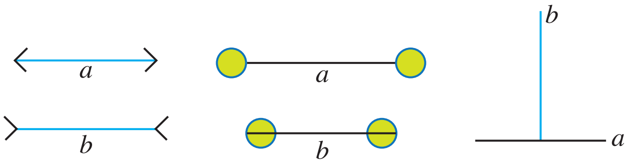


图 1

2. 图 2 每组中蓝色的圆 A 和圆 B 哪一个大?

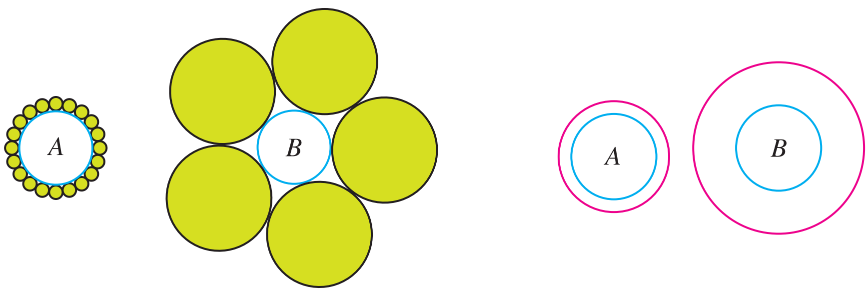


图 2

你对自己的结论有把握吗？利用刻度尺量一量，这时你的答案是什么？

要对事物作出某种判断，总是基于对这个事物的观察、实验与思考. 其中观察的结果是作出判断的重要依据，所以观察时必须认真、仔细. 有时观察得出的猜想不一定正确，还要借助于实验等进行验证.

图 3 每组中蓝色的线段互相平行吗？如何检验？学习了平行线的知识后，你的检验方法会更多.

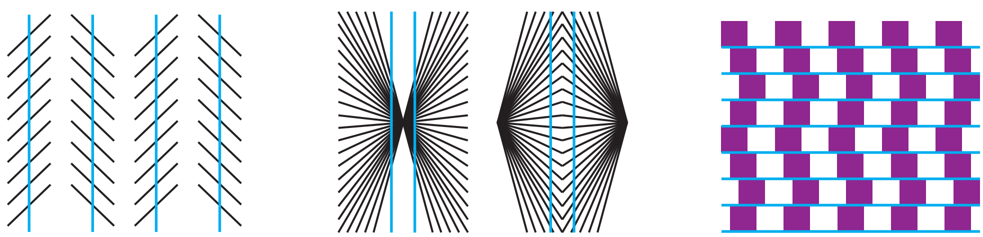


图 3

7.2 平行线

除相交外，平行也是直线之间的基本位置关系，本节我们将研究平行线．与相交线类似，我们借助两条直线被第三条直线所截形成的角，研究平行线的判定与性质．

7.2.1 平行线的概念

思考

如图 7.2-1，将两根木条 a，b 分别与木条 c 钉在一起，并把它们想象成在同一平面内两端无限延伸的三条直线．固定木条 b 和 c，转动木条 a，直线 a 从在 c 的左侧与直线 b 相交逐步变为在 c 的右侧与直线 b 相交．想象一下，在这个过程中，有没有直线 a 与直线 b 不相交的位置呢？

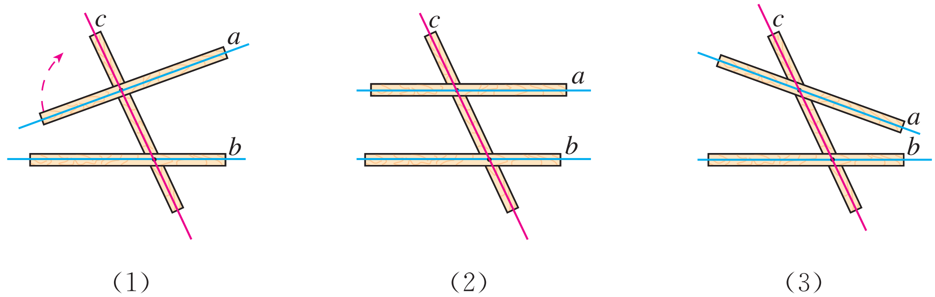


图 7.2-1

可以发现，在木条 a 转动的过程中，存在直线 a 与 b 不相交的位置．在同一平面内，当直线 a，b 不相交时，我们说直线 a 与 b 互相**平行**（parallel），记作“$a \parallel b$”．在同一平面内，不重合的两条直线只有两种位置关系：相交与平行．

在实际生活中，平行线随处可见，例如农田中平行的田垄、建筑物表面平行的栅格线（图 7.2-2）．你还能举出其他例子吗？

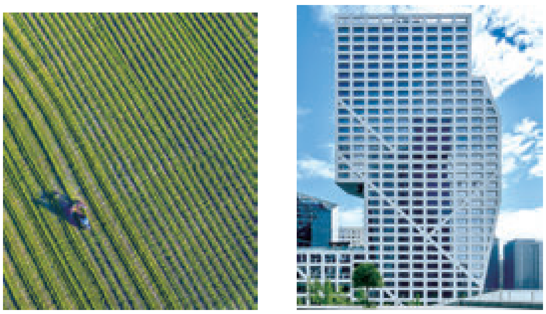


图 7.2-2

可以借助直尺和三角尺画平行线．如图 7.2-3，保持直尺不动，沿直尺推动三角尺，分别画直线 a，b，则 $a // b$．

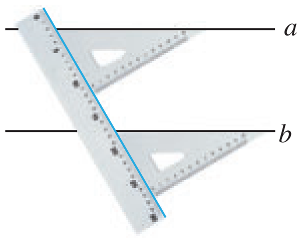


图 7.2-3

思考

在图 7.2-1 转动木条 a 的过程中，有几个位置使得直线 a 与 b 平行？

如图 7.2-4，过点 B 画直线 a 的平行线，能画出几条？过点 C 呢？

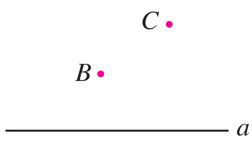


图 7.2-4

一般地，有如下关于平行线的基本事实：

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行．

由以上基本事实，可以进一步得到如下结论：

如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行．

也就是说：如果 $b // a$，$c // a$，那么 $b // c$（图 7.2-5）．

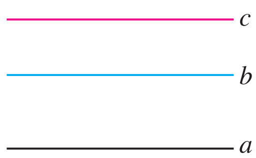


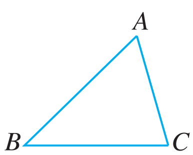
图 7.2-5

练习

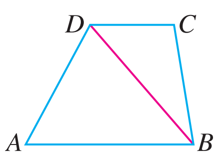
如图，用直尺和三角尺画平行线：

（1）过点 A 画 $MN // BC$；

（2）过点 C 画 $CE // DA$，与 AB 交于点 E；过点 C 画 $CF // DB$，与 AB 的延长线交于点 F．



（1）



（2）

7.2.2　平行线的判定

我们已经知道，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行．但是，由于直线是无限延伸的，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据两条直线不相交来判断它们是否平行．那么，有没有其他判定方法呢？

思考

在如图 7.2-3 利用直尺和三角尺画平行线的过程中，三角尺起着什么样的作用？

记图 7.2-3 中紧贴三角尺的直尺的边所在直线为 c，得到图 7.2-6．可以看出，画互相平行的直线 a 和 b，实际上就是分别画相等的$\angle 1$ 和$\angle 2$ 的一条边，而$\angle 1$ 和$\angle 2$ 正是直线 a，b 被直线 c 截得的同位角．这说明，如果同位角$\angle 1=\angle 2$，那么 $a /\!/ b$．

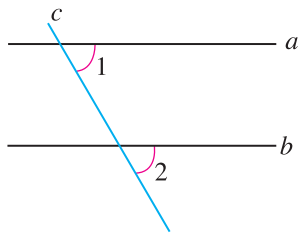


图 7.2-6

一般地，有如下利用同位角判定两条直线平行的基本事实：

判定方法 1　两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．

简单说成：**同位角相等，两直线平行．**

两条直线被第三条直线所截，同时得到同位角、内错角和同旁内角．由同位角相等，可以判定两条直线平行，能否利用内错角或同旁内角来判定两条直线平行呢？

探究

如图 7.2-7，直线 a，b 被直线 c 所截．

(1) 内错角$\angle 1$ 与$\angle 2$ 满足什么条件时，能得出 $a /\!/ b$？

(2) 同旁内角$\angle 1$ 与$\angle 3$ 满足什么条件时，能得出 $a /\!/ b$？

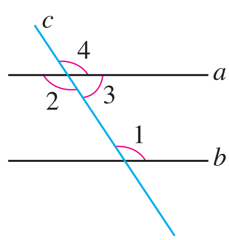


图 7.2-7

如果$\angle 1=\angle 2$，由判定方法 1，能得到 $a /\!/ b$，理由如下：因为$\angle 1=\angle 2$，而$\angle 2=\angle 4$（为什么？），所以$\angle 1=\angle 4$，即同位角相等，从而 $a /\!/ b$．

这样，就得到了利用内错角判定两条直线平行的方法：

判定方法 2　两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单说成：**内错角相等，两直线平行.**

> 遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题.

类似地，如果$\angle 1$与$\angle 3$互补，由判定方法 1 或判定方法 2，能得到 $a /\!/ b$（为什么?）. 这样，就得到了利用同旁内角判定两条直线平行的方法：

判定方法 3　两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

简单说成：**同旁内角互补，两直线平行.**

例 1　在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗？为什么？

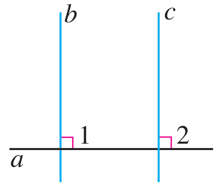


图 7.2-8

分析：垂直总与直角联系在一起，进而可以用相应角的关系来判断两条直线是否平行.

解：这两条直线平行. 理由如下：

如图 7.2-8，

∵　$b \perp a$，

∴　$\angle 1 = 90°$.

同理　$\angle 2 = 90°$.

∴　$\angle 1 = \angle 2$.

又　$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角，

∴　$b /\!/ c$（同位角相等，两直线平行）.

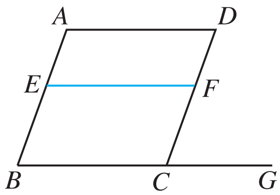
> 此处符号“∵”表示“因为”，符号“∴”表示“所以”.

你还能利用其他方法说明 $b /\!/ c$ 吗?

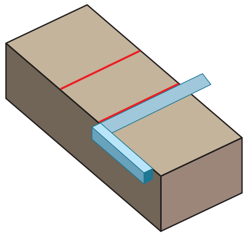
练习

1. 如图，E 是 AB 上一点，F 是 DC 上一点，G 是 BC 的延长线上一点.
   (1) 如果$\angle B = \angle DCG$，那么可以判断哪两条直线平行？为什么？
   (2) 如果$\angle D = \angle DCG$，那么可以判断哪两条直线平行？为什么？

（3）如果$\angle D+\angle DFE=180^\circ$，那么可以判断哪两条直线平行？为什么？



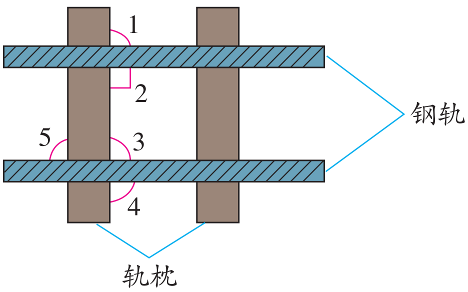
（第 1 题）



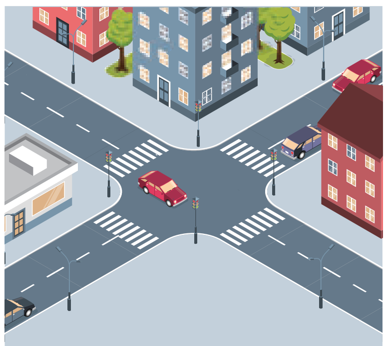
（第 2 题）

2. 如图，木工常用角尺画平行线，你能说出其中的道理吗？

3. 在铺设钢轨时，两条钢轨必须是互相平行的. 如图，已知$\angle 2$是直角，要判断两条钢轨是否平行，只需要再度量图中标出的哪个角？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图是两条道路互相垂直的交叉路口，你能画出它的平面示意图（用两条平行线段表示一条道路）吗？你能用类似的方法，画出两条道路成45°角的交叉路口的平面示意图吗？

7.2.3　平行线的性质

利用同位角相等，或者内错角相等，或者同旁内角互补，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角、内错角、同旁内角各有什么关系呢？这就是下面要学习的平行线的性质.

类似于研究平行线的判定，我们先来研究两条直线平行时，它们被第三条直线截得的同位角的关系.

探究

如图 7.2-9，画两条平行线 $a /\!/ b$，然后任意画一条截线 c 与这两条平行线相交，度量所形成的八个角的度数.

在$\angle 1$，$\angle 2$，…，$\angle 8$ 中，哪些是同位角？它们的度数有什么关系？由此猜想两条平行线被第三条直线截得的同位角有什么关系.

利用信息技术工具改变截线 c 的位置，同样度量并比较各对同位角的度数，你的猜想还成立吗？

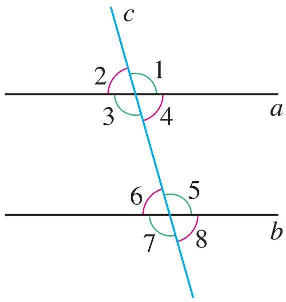


图 7.2-9

一般地，平行线具有性质：

性质 1　两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等.

简单说成：**两直线平行，同位角相等.**

思考

前面我们利用“同位角相等，两直线平行”推出了“内错角相等，两直线平行”. 类似地，你能由性质 1 推出两条平行线被第三条直线截得的内错角之间的关系吗？

如图 7.2-10，直线 $a /\!/ b$，c 是截线. 根据“两直线平行，同位角相等”，可得$\angle 1=\angle 2$. 而$\angle 3$ 和$\angle 2$ 互为对顶角，所以$\angle 3=\angle 2$. 所以$\angle 3=\angle 1$. 这样就得到了平行线的另一个性质：

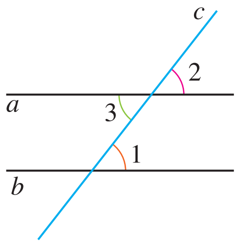


图 7.2-10

性质 2　两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

简单说成：**两直线平行，内错角相等.**

类似地，由性质 1 或性质 2，可以推出平行线关于同旁内角的性质（请你自己完成推理过程）：

性质 3　两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补.

简单说成：**两直线平行，同旁内角互补.**

例 2　图 7.2-11 是一块梯形铁片的残余部分，量得$\angle A=100^\circ$，$\angle B=115^\circ$，梯形的另外两个角$\angle D$，$\angle C$ 分别是多少度？

解：因为梯形上、下两底 DC 与 AB 互相平行，根据“两直线平行，同旁内角互补”，可得 $\angle A$ 与 $\angle D$ 互补，$\angle B$ 与 $\angle C$ 互补．于是

$$\angle D=180^\circ-\angle A=180^\circ-100^\circ=80^\circ,$$

$$\angle C=180^\circ-\angle B=180^\circ-115^\circ=65^\circ.$$

所以梯形的另外两个角 $\angle D$，$\angle C$ 分别是 80°，65°．

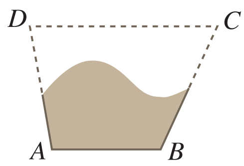
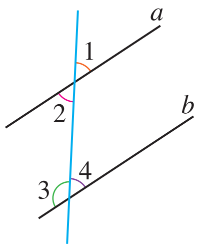


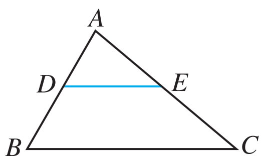
图 7.2-11

练习

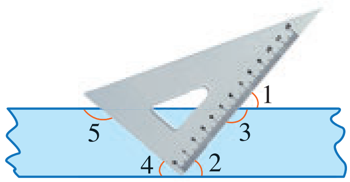
1. 如图，直线 $a/\!/b$，$\angle 1=54^\circ$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 各是多少度？



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，在三角形 ABC 中，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，$\angle ADE=60^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle AED=40^\circ$．

    （1）DE 和 BC 平行吗？为什么？

    （2）$\angle C$ 是多少度？为什么？

3. 将一个直角三角尺与两边平行的纸条如图放置，则下列结论正确的是______________（填序号）．

    ① $\angle 1=\angle 2$；　　② $\angle 4+\angle 5=180^\circ$；

    ③ $\angle 1+\angle 4=90^\circ$；　　④ $\angle 4+90^\circ=\angle 3$．

前面我们学习了平行线的判定和性质，在解决问题时，经常需要把它们结合起来使用．

例 3　如图 7.2-12，已知直线 $a/\!/b$，$\angle 1=\angle 3$，那么直线 c 与 d 平行吗？为什么？

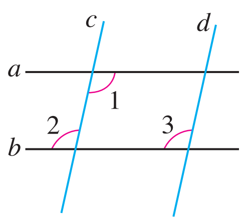


图 7.2-12

分析：由于 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 是直线 c 与 d 被直线 b 所截形成的同位角，所以如果能推出 $\angle 2=\angle 3$，就可以判断直

线 c 和 d 是平行的. 而已知$\angle 1=\angle 3$，所以只需由直线 $a /\!/ b$，推出$\angle 1=\angle 2$.

解： 直线 c 与 d 平行. 理由如下：

如图 7.2-12，

你能用其他方法判定直线 c 与 d 平行吗？

∵ $a /\!/ b$，

∴ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\angle 1=\angle 3$，

∴ $\angle 2=\angle 3$.

∴ $c /\!/ d$（同位角相等，两直线平行）.

例 4 如图 7.2-13，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=50°$，$\angle ABC$ 等于多少度？

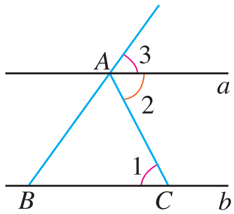


图 7.2-13

分析： 由于$\angle 3$ 的大小是已知的，所以可以尝试推导$\angle ABC$ 与$\angle 3$ 的大小关系. 而由已知条件$\angle 1=\angle 2$，可以推出 $a /\!/ b$，从而可以得到$\angle ABC=\angle 3$.

解： ∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $a /\!/ b$（内错角相等，两直线平行）.

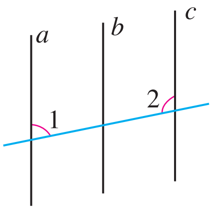
∴ $\angle 3=\angle ABC$（两直线平行，同位角相等）.

又 $\angle 3=50°$，

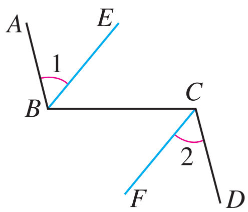
∴ $\angle ABC=50°$.

练习

1. 如图，如果直线 $a /\!/ b$，$\angle 1+\angle 2=180°$，那么直线 b 和 c 平行吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$AB /\!/ CD$，且$\angle 1=\angle 2$，那么直线 BE 与 CF 平行吗？为什么？

习题 7.2

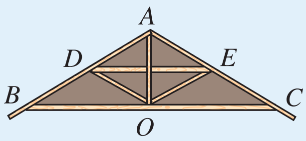
复习巩固

1. 读下列语句，并画出图形：

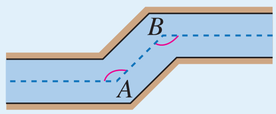
 (1) 直线 AB 垂直于 CD，垂足是 O，点 P 是直线 AB 上一点，直线 EF 经过点 P 且与直线 CD 平行；

 (2) 直线 AB，CD 相交于点 O，点 P 是直线 AB，CD 外的一点，直线 PE 与直线 CD 平行，且与直线 AB 相交于点 E.

2. 如图，为了加固房屋，要在屋架上加一根横梁 DE，使 $DE \parallel BC$. 如果 $\angle ABC=31^\circ$，$\angle ADE$ 应为多少度？



（第 2 题）



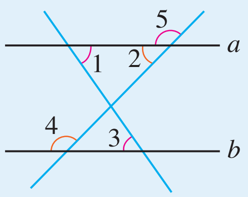
（第 3 题）

3. 如图，一条水渠两次转弯后，和原来的方向相同. 如果第一次的拐角 $\angle A$ 是 135°，第二次的拐角 $\angle B$ 是多少度？为什么？

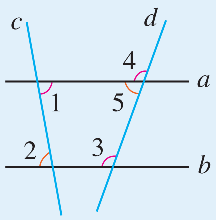
4. 如图，在下列条件中，能判断直线 $a \parallel b$ 的是（　　）.

 (A) $\angle 2+\angle 5=180^\circ$　　(B) $\angle 2=\angle 4$

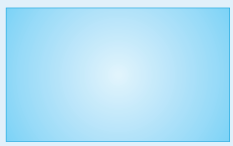
 (C) $\angle 4+\angle 5=180^\circ$　　(D) $\angle 1=\angle 3$



（第 4 题）



（第 5 题）

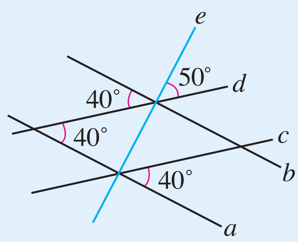


（第 6 题）

5. 如图，$a \parallel b$，直线 c，d 是截线，$\angle 1=80^\circ$，$\angle 5=70^\circ$. $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 各是多少度？为什么？

6. 如图，有一块方形玻璃，如何检验它相对的两条边是否平行？

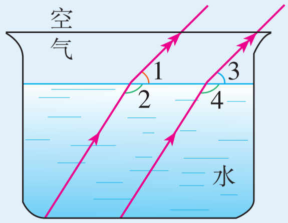
7. 找出图中互相平行的直线和互相垂直的直线.



（第 7 题）

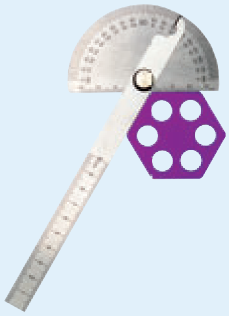
综合运用

8. 当光线从水中射向空气时，要发生折射，在水中平行的光线，折射到空气中也是平行的. 如图，$\angle 1=45°$，$\angle 2=122°$，求图中$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

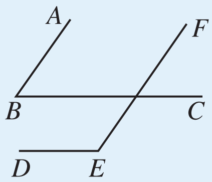


（第 8 题）

9. 图中是对顶角量角器，你能说出用它测量角的原理吗？



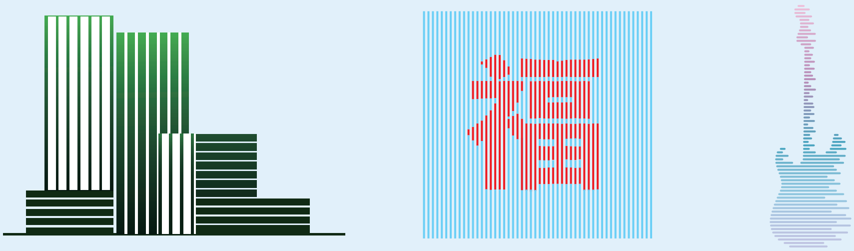
（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，若 $AB \parallel FE$，$BC \parallel DE$，则$\angle E+\angle B$ 等于多少度？

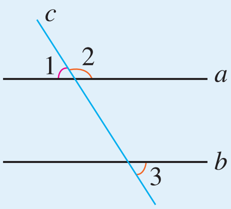
11. 如图，许多漂亮的装饰图案是用平行条纹设计的. 请你用平行条纹设计一些图案，并与同学交流一下.



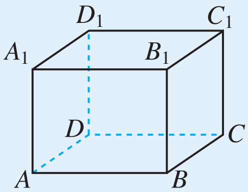
（第 11 题）

拓广探索

12. 如图，当$\angle 1=\angle 3$ 时，直线 a，b 平行吗？当$\angle 2+\angle 3=180°$时，直线 a，b 平行吗？为什么？



（第 12 题）



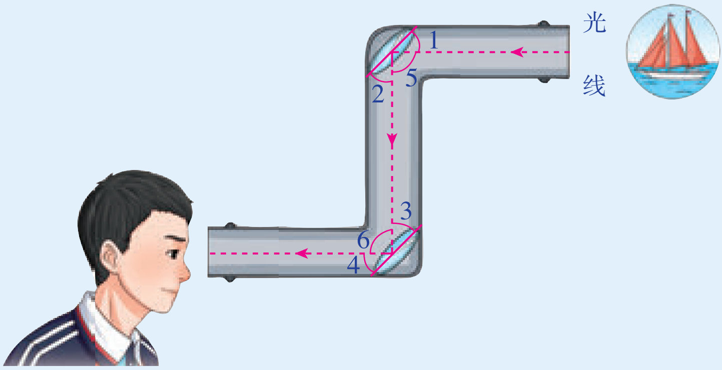
（第 13 题）

13. 观察如图所示的长方体，用符号表示下列两条棱的位置关系：

A_1B_1____ AB，AA_1____ AB，A_1D_1____ D_1C_1，AD ____ BC.

你能在教室里找到这些位置关系的实例吗？与同学讨论一下.

14. 如图，潜望镜中的两面镜子是互相平行放置的，光线经过镜子反射时，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 2$ 和 $\angle 3$ 有什么关系？为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的？（提示：分析这两条光线被哪条直线所截.）



（第 14 题）

7.3 定义、命题、定理

前面，我们在学习一些新的数学对象时，对它们进行了清晰、明确的描述. 例如：

（1）规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作数轴；

（2）使方程左、右两边的值相等的未知数的值，叫作方程的解；

（3）从一个角的顶点出发，把这个角分成两个相等的角的射线，叫作这个角的平分线；

（4）直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫作点到直线的距离.

这样的描述称为数学对象的**定义**（definition）. 一个数学对象的定义揭示了它的本质特征，能够帮助我们准确地理解它，并作出准确的判断. 例如，“数轴”指的是一条直线，而且这条直线上有规定的原点、正方向和单位长度；根据方程的解的定义，可以判断 $x=\frac{3}{2}$ 是方程 $2x=3$ 的解.

我们再来看一些可以判断正确与否的陈述语句，例如：

（1）等式两边加同一个数，结果仍相等；

（2）对顶角相等；

（3）如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；

（4）两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补；

（5）如果一个数能被 2 整除，那么它也能被 4 整除.

容易判断，前 4 个语句都是正确的，第 5 个语句是错误的. 像这样可以判断为正确（或真）或错误（或假）的陈述语句，叫作**命题**（proposition）. 被判断为正确（或真）的命题叫作**真命题**，被判断为错误（或假）的命题叫作**假命题**.

数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，这时“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论. 例如，在上面的命题（3）中，“两条直线都与第三条直线平行”是题设，“这两条直线也互相平行”是结论.

有些命题的题设和结论不明显，要经过分析才能找出来，从而将它们写成“如果……那么……”的形式. 例如，命题“对顶角相等”可以写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

人民教育出版社

由题设和结论组成的命题，如果题设成立，那么结论一定成立，这样的命题就是正确的；如果题设成立，不能保证结论一定成立，这样的命题就是错误的．例如，命题“互为相反数的两个数的绝对值相等”是正确的，命题“如果两个角互补，那么它们是邻补角”是错误的．

练习

1. 举出一些学过的定义的例子．
2. 举出一些学过的真命题的例子．
3. 指出下列命题的题设和结论：
   （1）若 $a=b$，则 $5a=5b$；
   （2）如果 $AB\perp CD$，垂足为 O，那么 $\angle AOC=90°$；
   （3）如果 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，那么 $\angle 1=\angle 3$；
   （4）两直线平行，同位角相等．

在前面，我们学过一些图形的性质，它们都是真命题．其中有些命题是基本事实，如“两点确定一条直线”“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”等．还有一些命题，如“对顶角相等”“内错角相等，两直线平行”，它们的正确性是经过推理证实的，这样的真命题叫作**定理**（theorem）．定理也可以作为继续推理的依据．

在很多情况下，一个命题的正确性需要经过推理才能作出判断，这个推理过程叫作**证明**（proof）．下面以证明命题“在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条”为例，来说明什么是证明．

例　如图 7.3-1，已知直线 $a\perp b$，$b\parallel c$，求证 $a\perp c$．

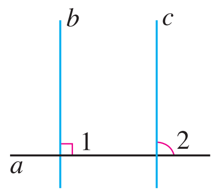


图 7.3-1

证明： ∵　$a\perp b$（已知），

∴　$\angle 1=90°$（垂直的定义）．

∵　$b\parallel c$（已知），

∴　$\angle 1=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）．

∴　$\angle 2=90°$（等式的基本事实）．

∴　$a\perp c$（垂直的定义）．

由例题可以看出，证明中的每一步推理都要有根据，不能“想当然”．这

些根据，可以是已知条件，也可以是学过的定义、基本事实、定理等.

判断一个命题是错误的，只要举出一个例子（反例），它符合命题的题设，但不满足结论就可以了.

例如，要判断命题“相等的角是对顶角”是错误的，可以举出如下反例：在图 7.3-2 中，OC 是$\angle AOB$ 的平分线，$\angle 1=\angle 2$，但它们不是对顶角.

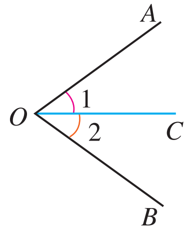


图 7.3-2

练习

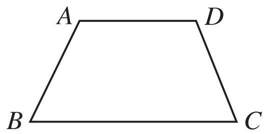
1. 在下面的括号内，填上推理的依据.

如图，$\angle A+\angle B=180^{\circ}$，求证$\angle C+\angle D=180^{\circ}$.

证明：$\because$ $\angle A+\angle B=180^{\circ}$，

$\therefore$ $AD /\!/ BC$（____________________）.

$\therefore$ $\angle C+\angle D=180^{\circ}$（________________）.



（第 1 题）

2. 命题“同位角相等”是正确的吗？如果是，说出理由；如果不是，请举出反例.

习题 7.3

复习巩固

1. 下列语句哪些是命题？哪些是真命题？

（1）如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$；

（2）等角的补角相等；

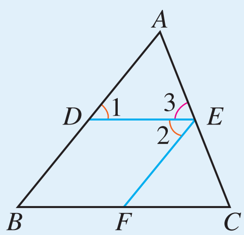
（3）过一点作直线 l 的垂线；

（4）两个锐角的和是钝角.

2. 如图，用符号表示下列推理过程：

（1）因为$\angle 1$ 和$\angle 2$ 相等，根据“内错角相等，两直线平行”，所以 AB 和 EF 平行；

（2）因为 DE 和 BC 平行，根据“两直线平行，同位角相等”，所以$\angle 1=\angle B$，$\angle 3=\angle C$.



（第 2 题）

综合运用

3. 完成下面的证明.

(1) 如图 (1)，$AB /\!/ CD$，$BC /\!/ ED$. 求证$\angle B+\angle D=180^\circ$.

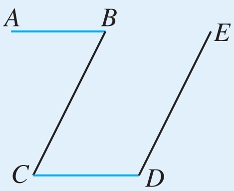
证明：$\because$ $AB /\!/ CD$，

$\therefore$ $\angle B=$______ (____________________).

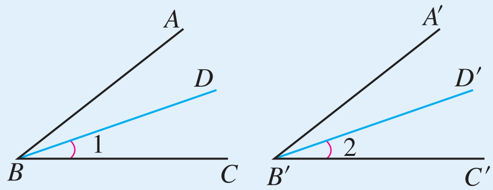
$\because$ $BC /\!/ ED$，

$\therefore$ $\angle C+\angle D=180^\circ$ (____________________).

$\therefore$ $\angle B+\angle D=180^\circ$.



(1)



(2)

(第 3 题)

(2) 如图 (2)，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，BD，$B'D'$分别是$\angle ABC$，$\angle A'B'C'$的平分线. 求证$\angle 1=\angle 2$.

证明：$\because$ BD，$B'D'$分别是$\angle ABC$，$\angle A'B'C'$的平分线，

$\therefore$ $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=$________ (____________________).

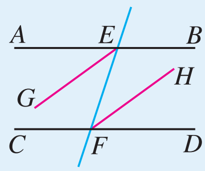
又 $\angle ABC=\angle A'B'C'$，

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle A'B'C'$ (____________________).

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

拓广探索

4. 如图，平行直线 AB，CD 与 EF 相交，交点分别为 E，F，EG 平分$\angle AEF$，FH 平分$\angle EFD$，EG 和 FH 平行吗？为什么？



(第 4 题)

7.4 平移

在日常生活中，一些图案可以看成由其中的一部分平行移动得到，例如图 7.4-1 中建筑物表面、瓷砖和织物上的图案等. 这样的图案常常给人整齐、和谐的感觉. 你能再举出一些类似的例子吗？

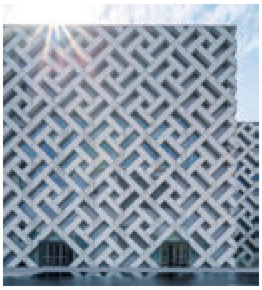
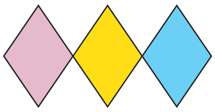


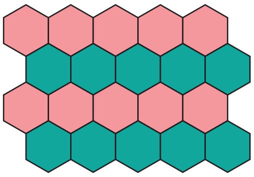
图 7.4-1

思考

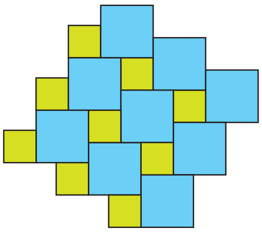
仔细观察下面的图案（图 7.4-2），它们有什么共同特征？能否根据其中的一部分绘制出整个图案？



（1）



（2）



（3）

图 7.4-2

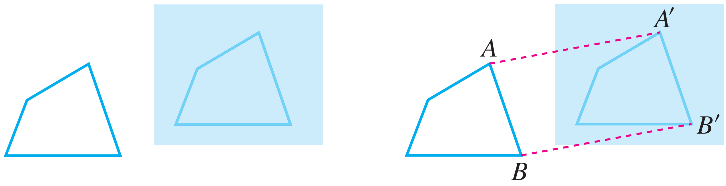
可以发现，图 7.4-2 中的每个图案都是由一些相同的图形组成的，将其中的一个图形平行移动，就可以得到整个图案. 例如，图 7.4-2（1）中的图案是由大小相同的平行四边形组成的，将其中的一个平行移动，再涂上不同的颜色，就可以得到整个图案.

一般地，在平面内，将一个图形按某一方向移动一定的距离，这样的图形运动叫作**平移**（translation）. 图形平移的方向不限于水平或竖直方向，图形可以沿平面内任何方向平移.

下面我们研究平移前后图形的关系.

探究

如图 7.4-3（1），把一张半透明的纸盖在一个四边形上，在纸上描出四边形，然后将这张纸沿着某一方向移动一定距离. 这两个四边形的形状、大小有什么关系?



（1）　　　　　　　　（2）

图 7.4-3

如图 7.4-3（2），在这两个四边形中，找出两组对应点 A 与 A'，B 与 B'，连接它们得到线段 AA'，BB'，AA'和 BB'有什么位置关系? 测量它们的长度，它们的长度有什么关系?

可以发现，经过平移得到的四边形与原四边形的形状、大小完全相同；连接两组对应点得到的线段 AA' 与 BB' 平行，并且它们的长度相等，即 $AA' /\!/ BB'$，并且 $AA'=BB'$.

画出连接其他一些对应点的线段，它们仍有类似的关系吗?

事实上，对于平移前后的图形，都能发现类似的规律（你也可以利用平移再画出一些图形进行研究）. 于是，我们归纳出平移的性质.

归纳

把一个图形平移，得到的新图形具有下列特点：

1. 新图形与原图形的形状和大小完全相同.

2. 新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等.

给定一个图形，可以画出这个图形平移后的图形.

例　如图 7.4-4，平移三角形 ABC，使点 A 移动到点 A'，画出平移后的三角形 $A'B'C'$.

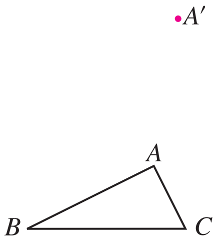


图 7.4-4

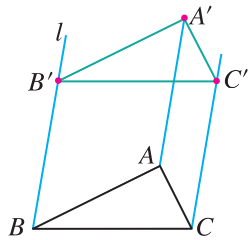


图 7.4-5

分析： 要画出平移后的三角形 $A'B'C'$，关键是确定其三个顶点的位置. 题目中已知点 A 的对应点 A'，由平移前后的图形对应点的连线平行且相等，即可确定点 B，C 的对应点 B'，C'的位置.

解： 如图 7.4-5，连接 AA'，过点 B 画 AA'的平行线 l，在 l 上截取 $BB'=AA'$，则点 B'就是点 B 的对应点.

类似地，作出点 C 的对应点 C'，连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，就得到了平移后的三角形 $A'B'C'$.

实际上，几何图形都可以看作由点组成，对于一些规则的几何图形，只要画出图形中的一些关键点经过平移后的对应点，连接这些对应点，就可以得到原图形平移后的图形.

利用平移，人们可以设计出美丽的图案，许多装饰图案就是利用平移设计的（图 7.4-6）.

图 7.4-6

探究

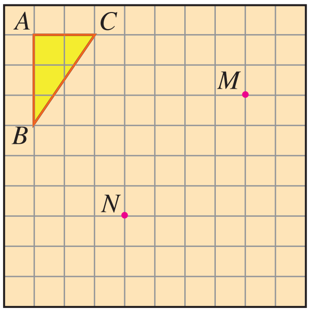
选择一个图形作为基本图形，利用平移设计一个图案，再给它们涂上颜色. 和同学交流一下你的设计.

利用信息技术工具，可以方便地平移图形，设计图案，你也可以试一试.

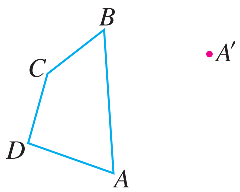
人民教育出版社

练习

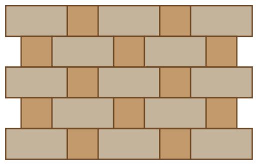
1. 在方格纸中平移三角形 ABC，使点 A 移到点 M，点 B 和点 C 应移到什么位置？再次平移三角形，使点 A 由点 M 移到点 N. 分别画出两次平移后的三角形. 如果直接平移三角形 ABC，使点 A 移到点 N，平移后的三角形和前面第二次平移后得到的三角形位置相同吗？



（第 1 题）



（第 2 题）



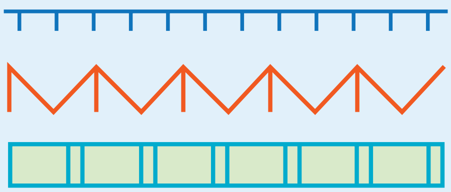
（第 3 题）

2. 如图，经过平移，四边形 $ABCD$ 的顶点 A 移到点 A'. 画出平移后的四边形 $A'B'C'D'$.
3. 利用平移，绘制出如图所示的图案.

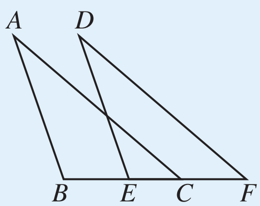
习题 7.4

复习巩固

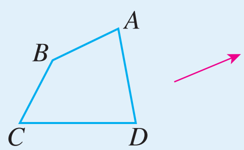
1. 图中的图案分别可以由什么图形平移形成？



（第 1 题）



（第 2 题）

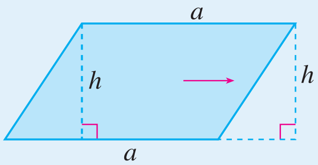


（第 3 题）

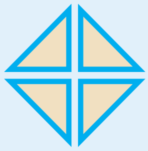
2. 如图，将三角形 ABC 沿 BC 方向平移至三角形 DEF，找出图中平行的线段和相等的线段.
3. 将四边形 $ABCD$ 沿箭头方向平移 1 cm，画出平移后的四边形 $A'B'C'D'$.

综合运用

4. 用平移方法说明怎样得出平行四边形的面积公式 $S=ah$.



（第 4 题）

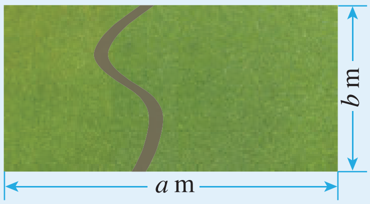


（第 5 题）

5. 如图，有一个由 4 个三角形组成的图形，通过平移，你能用它组成什么图案？试一试，把你的图案与同学交流一下.

拓广探索

6. 如图，在一块长为 a m，宽为 b m 的长方形草地上，有一条弯曲的小路，小路的左边线向右平移 1 m 就是它的右边线. 求这块草地青草覆盖的面积.

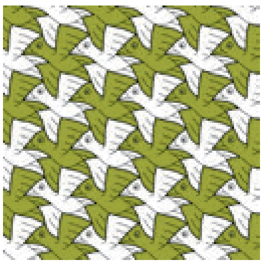


（第 6 题）

探究与发现

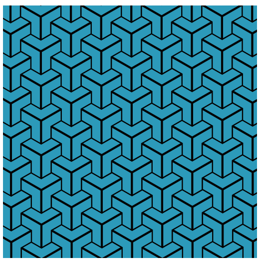
利用平移设计图案

通过平移一个图形，不仅可以绘制带状的图案，还可以绘制覆盖整个平面的美丽图案，例如荷兰艺术家埃舍尔的作品、蜂巢、织物上的图案等（图 1）. 这样的图案给人整齐有序、可以无限延展的感觉.



（1）

（2）



（3）

图 1

你知道图 1 中的图案是怎样生成的吗？与利用平移绘制带状的图案类似，在绘制这样的图案时，也要首先选定一个基本图形，然后把这个图形先按某一方向重复移动一定距离，再按另一个方向（与之前平移的方向不平行）重复移动一定距离，就可以得到一幅美丽的图案了.

再来看图 1（1），不难发现，这个图案是由其中的一个“鸟”形图案（图 2）平移得到的. 那么，这个“鸟”形图案又是怎样画出来的呢？

借助正方形上的平移，就可以画出“鸟”形图案. 图 3 展示了由正方形上的平移得到这个“鸟”形图案的过程.

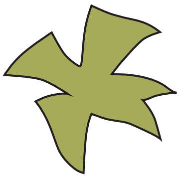


图 2

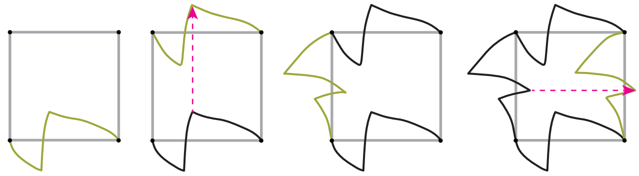


图 3

这种正方形上的平移，因为是从一处移到另一处（上移到下、下移到上、左移到右、右移到左），所以能保证这样的图案平移后互相吻合，不留缝隙，形成一幅美丽的图案.

图 4 中的图案也是先通过正方形上的平移得到一个基本图形，再平移这个图形得到的. 你能分别说一说每个图案中的基本图形是怎样得到的吗？

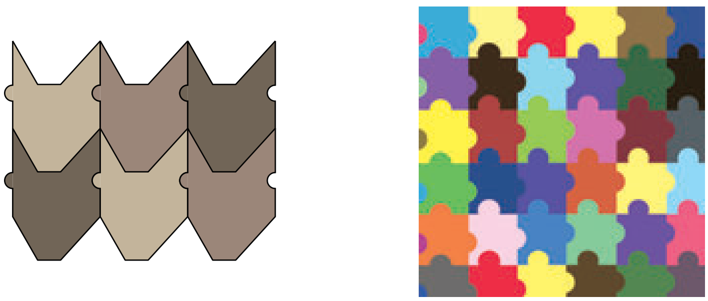


图 4

图 1（3）中图案的基本图形是通过正六边形上的平移得到的，你能利用平移画出这个基本图形吗？

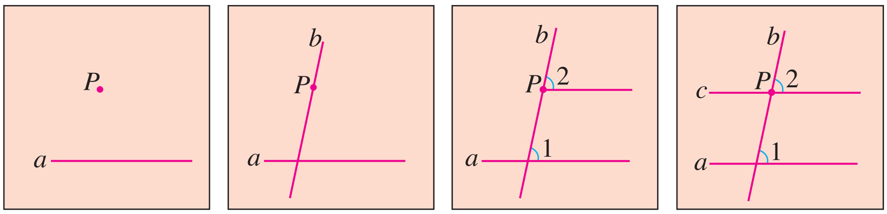
最后，请你利用平移设计几幅美丽的图案吧！设计图案时，你也可以利用信息技术工具.

数学活动

活动1　你有多少种画平行线的方法

学习了平行线后，李明、刘伟、王芳三位同学分别想出了过直线外一点画这条直线的平行线的新方法.

李明的画法如图 1 所示.

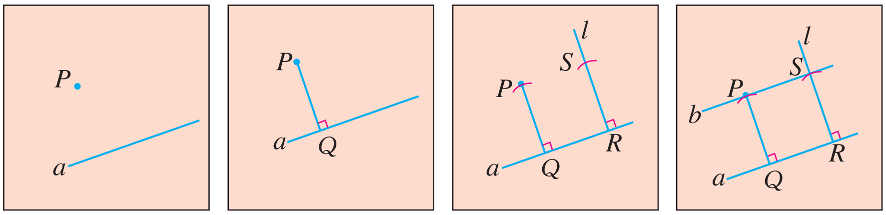


过点P画直线b　　画$\angle 2=\angle 1$　　则$c/\!/a$

(1)　(2)　(3)　(4)

图 1

刘伟的画法如图 2 所示.

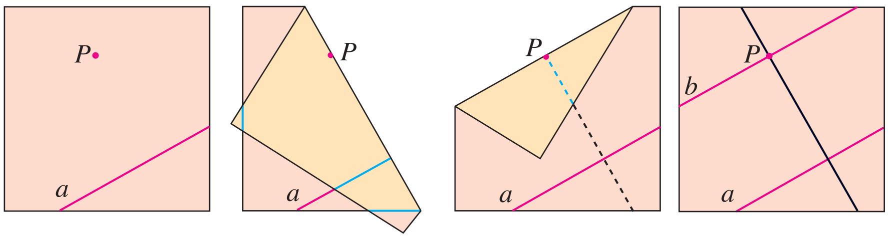


画$PQ\perp a$　　画$l\perp a$，取$RS=PQ$　　连接PS，则$b/\!/a$

(1)　(2)　(3)　(4)

图 2

王芳是通过折纸画的，方法如图 3 所示.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 3

你还有其他方法吗？动手试一试，与同学交流一下.

活动2　设计窗格图案

如图 4，传统建筑中的窗格设计精巧、样式繁多，体现了我国建筑独特的艺术表现力和文化内涵.

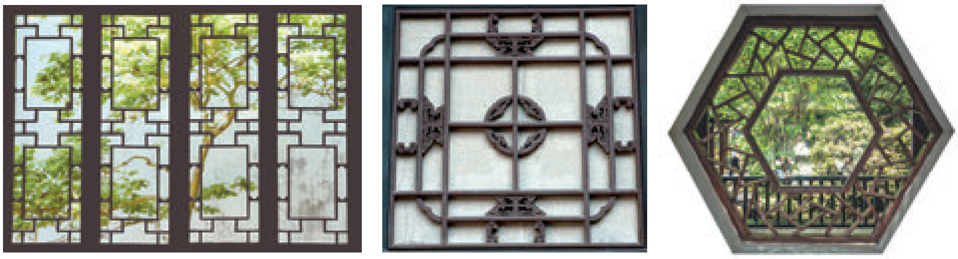


图 4

在各式各样的窗格图案中，有一类是仅由笔直的短木条或铁条沿横、竖、斜方向交错构成的（图 5）. 这样的窗格子给人以明朗、匀称、简洁的感觉.

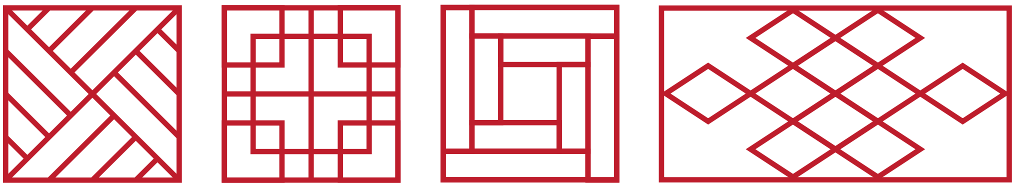


图 5

你能用交错的线段设计一些窗格图案吗？请在图 6 中试一试.

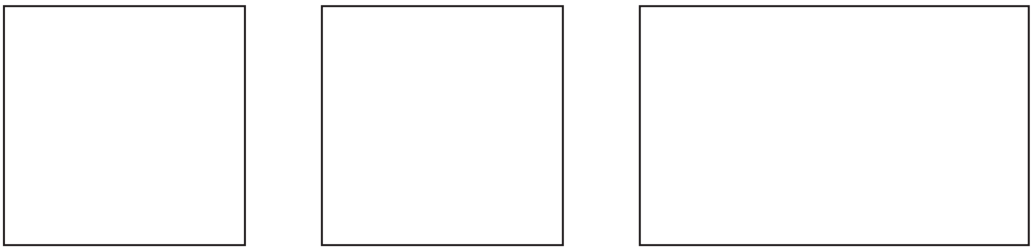
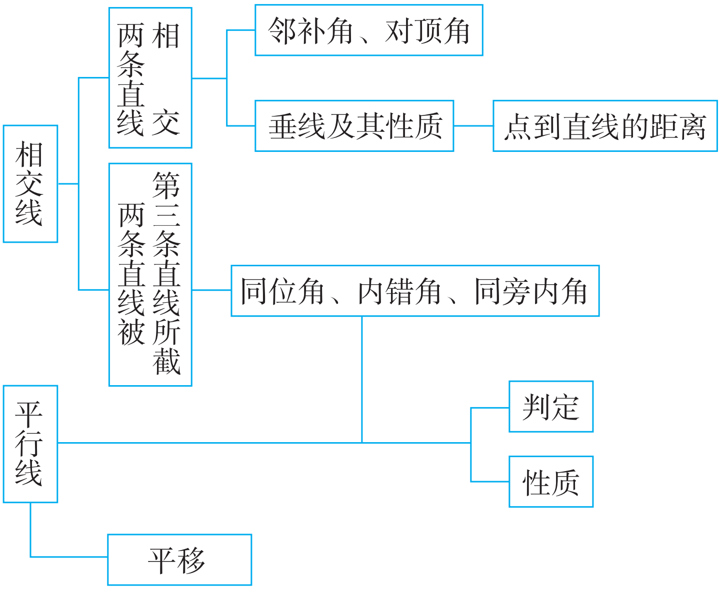


图 6

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

在本章中，我们研究了平面内不重合的两条直线的位置关系——相交与平行．对于相交，按照从一般到特殊的顺序，先研究了两条直线相交所形成的邻补角和对顶角的位置关系和数量关系，这也是相交线的性质，然后研究了相交的特殊情形——垂直，它在实际生产和生活中具有广泛的应用．对于平行，借助两条直线被第三条直线所截形成的同位角、内错角和同旁内角，研究了平行线的判定与性质．

通过对平行线的研究，我们知道了“图形的判定”讨论的是确定某种图形需要什么条件．例如，两条直线与第三条直线相交，具备“同位角相等”，就有“两直线平行”．而“图形的性质”讨论的是这类图形有怎样的共同特性．例如，两条直线只要平行，它们被第三条直线所截时，就一定有同位角相等．

学习本章时，要注意观察实物、模型和图形，通过观察、测量、实验、

对比、类比等，借助几何直观寻找图形中的位置关系和数量关系，发现图形的性质．同时，还要注意体会通过推理获得数学结论的方法，培养言之有据的习惯和有条理地思考、表达的能力．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．下面是本章学到的一些数学名词：邻补角、对顶角、垂直、平行、同位角、内错角、同旁内角、平移，你能用自己的语言描述它们吗？你能分别画一个图形表示它们吗？

2．两条直线相交形成的四个角具有怎样的位置关系和数量关系？

3．什么是点到直线的距离？你会度量吗？请举例说明．

4．怎样判定两条直线是否平行？平行线有什么性质？对比平行线的性质和直线平行的判定方法，它们有什么异同？

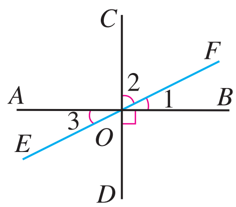
5．什么是命题？如何判断一个命题是正确的还是错误的？请结合具体例子说明．

6．图形平移时，连接各对应点的线段有什么关系？如何利用平移设计图案？

复习题 7

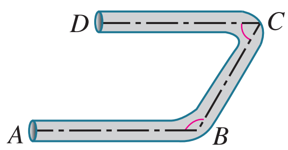
复习巩固

1．如图，直线 $AB \perp CD$，垂足为 O，直线 EF 经过点 O，$\angle 1=26°$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle BOE$ 的度数．



（第 1 题）

2．如图是一根弯形管道的平面示意图，其中的拐角 $\angle ABC=120°$，$\angle BCD=60°$，这时说管道 AB 与 DC 平行对吗？为什么？



（第 2 题）

3．判断题．

（1）a，b，c 是直线，若 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，则 $a /\!/ c$；

（2）a，b，c 是直线，若 $a \perp b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$．

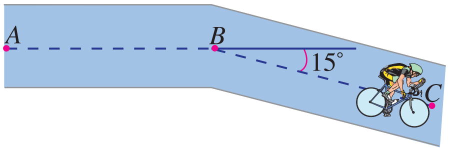
4. 根据下列语句画出图形：

(1) 过线段 AB 的中点 C，画 $CD\perp AB$；

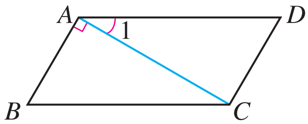
(2) 点 P 到直线 AB 的距离是 3 cm，过点 P 画直线 AB 的垂线；

(3) 过三角形 ABC 内的一点 P，分别画 AB，BC，AC 的平行线.

5. 如图，某人骑自行车自 A 处沿正东方向前进，至 B 处后，行驶方向改为东偏南 15°，行驶到 C 处仍按正东方向行驶，画出继续行驶的路线.



（第 5 题）



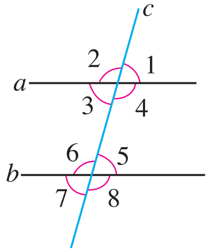
（第 6 题）

6. 如图，$\angle 1=30°$，$\angle B=60°$，$AB\perp AC$，垂足为 A.

(1) $\angle DAB+\angle B$ 等于多少度？

(2) AD 与 BC 平行吗？AB 与 DC 平行吗？

7. 如图，平行线 a，b 被直线 c 所截，若知道 $\angle 1$～$\angle 8$ 中一个角的度数，能否求出其他角的度数？如果能，用其中一个角表示出其他各角.



（第 7 题）

综合运用

8. 选择题.

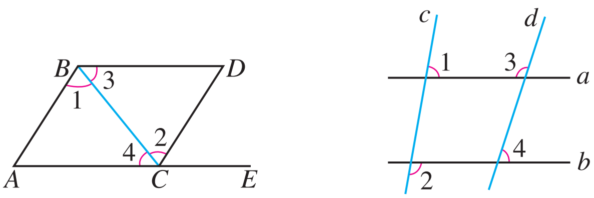
(1) 如图 (1)，点 E 在 AC 的延长线上，下列条件中能判断 $AB\parallel CD$ 的是（　　）.

(A) $\angle 3=\angle 4$　　(B) $\angle 1=\angle 2$

(C) $\angle D=\angle DCE$　　(D) $\angle D+\angle ACD=180°$

(2) 如图 (2)，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3=108°$，则 $\angle 4=$（　　）.

(A) 72°　　(B) 80°　　(C) 82°　　(D) 108°

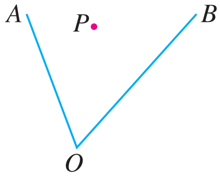


(1)　　(2)

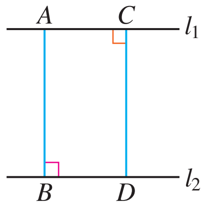
（第 8 题）

9. 图中所示为防护网的示意图，它可看成由两组平行线组成，你能通过检验一些角的大小来验证其中的线段平行吗？说出你的做法.

（第 9 题）



（第 10 题）



（第 11 题）

10. 如图，$\angle AOB$ 内有一点 P.

（1）过点 P 画 $PC /\!/ OB$，交 OA 于点 C，画 $PD /\!/ OA$，交 OB 于点 D；

（2）写出图中相等的角；

（3）写出图中互补的角.

11. 如图，直线 $l_1 /\!/ l_2$，$AB \perp l_2$，$CD \perp l_1$，AB 和 CD 平行吗？为什么？

12. 完成下面的证明.

（1）如图（1），点 D，E，F 分别是三角形 ABC 的边 BC，CA，AB 上的点，$DE /\!/ BA$，$DF /\!/ CA$. 求证 $\angle FDE = \angle A$.

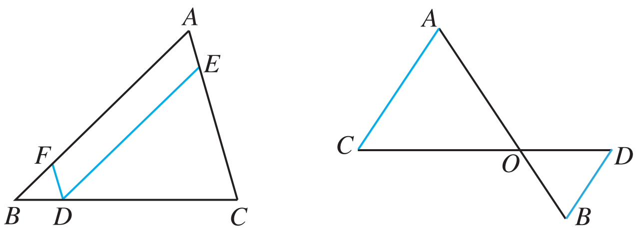
证明：∵ $DE /\!/ BA$，

∴ $\angle FDE =$______（____________________）.

∵ $DF /\!/ CA$，

∴ $\angle A =$______（____________________）.

∴ $\angle FDE = \angle A$.



（1）　　（2）

（第 12 题）

（2）如图（2），AB 和 CD 相交于点 O，$\angle C = \angle COA$，$\angle D = \angle BOD$. 求证 $AC /\!/ DB$.

证明：∵ $\angle C = \angle COA$，$\angle D = \angle BOD$，

且 $\angle COA = \angle BOD$（____________________），

∴　$\angle C=$______.

∴　$AC/\!/DB$（______________________）.

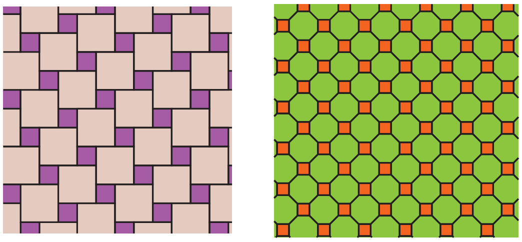
13. 指出下列命题的题设和结论，并判断它们是正确的还是错误的. 如果是错误的，举出一个反例.

（1）两个角的和等于平角时，这两个角互为补角；

（2）同旁内角相等，两直线平行；

（3）两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

14. 如图是两个整体图案的局部，分别指出其中的基本图形，并说明怎样由基本图形平移得到整个图案.

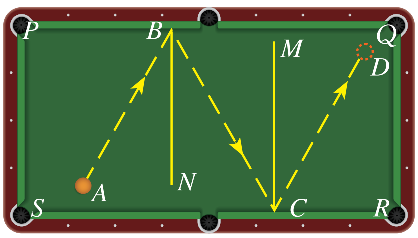


（第 14 题）

拓广探索

15. 如图，这是一套住房的平面图，图中有许多相交线和平行线. 量量你家的住房，选择适当的比例尺，画出它的平面图. 你能自己设计一个户型图吗？

（第 15 题）



（第 16 题）

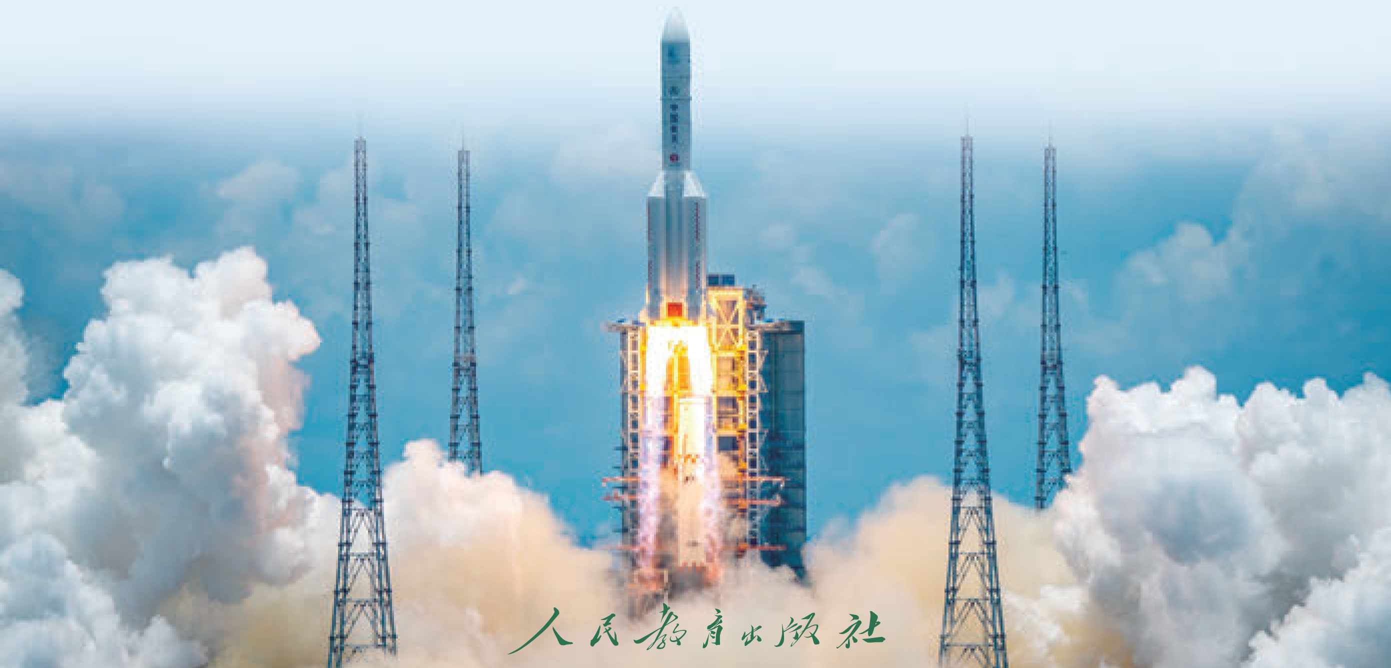
16. 一张台球桌的桌面如图所示，一个球从桌面上的点 A 滚向桌边 PQ，碰着 PQ 上的点 B 后便反弹而滚向桌边 RS，碰着 RS 上的点 C 便反弹而滚向点 D. 已知 $PQ/\!/SR$，AB，BC，CD 都是直线，且 $\angle ABC$ 的平分线 BN 垂直于 PQ，$\angle BCD$ 的平分线 CM 垂直于 SR，那么，球经过两次反弹后所滚的路径 CD 是否平行于原来的路径 AB？

第八章　实数

当“天问一号”火星探测器的速度大于第二宇宙速度 v（单位：m/s）时，它就会克服地球引力，永远离开地球，飞向火星. v 的大小满足 $v^2=2gR$，其中 g 是地球表面的重力加速度，$g\approx 9.8$（单位：$\mathrm{m/s^2}$），R 是地球半径，$R\approx 6.4\times 10^6$（单位：m）. 怎样求 v 呢？这就要用到平方根的概念.

随着对于数的认识的不断深入，人们发现，边长为 1 的正方形的对角线的长度值不是有理数，这就需要引入一种新的数——无理数. 实际中对第二宇宙速度等的计算也要用到无理数.

在本章中，我们将首先学习平方根与立方根；在此基础上引入无理数，把数的范围从有理数扩充到实数；然后类比有理数，引入实数在数轴上的表示和实数的运算，从中进一步感悟数系扩充的过程，并用这些知识解决一些实际问题.



8.1 平方根

我们知道，已知一个数，通过平方运算可以求这个数的平方. 反过来，如果已知一个数的平方，那么怎样求这个数呢?

思考

如果一个数的平方等于 9，那么这个数是多少?

因为 $3^2=9$，所以这个数可以是 3；又因为 $(-3)^2=9$，所以这个数也可以是 -3. 除 3，-3 以外，任何一个数的平方都不等于 9. 因此，如果一个数的平方等于 9，那么这个数是 3 或 -3. 填写下表：

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地，如果一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个数 x 叫作 a 的**平方根**（square root）或**二次方根**. 例如，3 和 -3 是 9 的平方根. 通常把 3 和 -3 合在一起简记为“±3”，则 ±3 是 9 的平方根. 求一个数的平方根的运算，叫作**开平方**.

±3 的平方等于 9，9 的平方根是 ±3，可以发现，平方与开平方互为逆运算（图 8.1-1）. 根据这种互逆关系，可以求一个数的平方根.

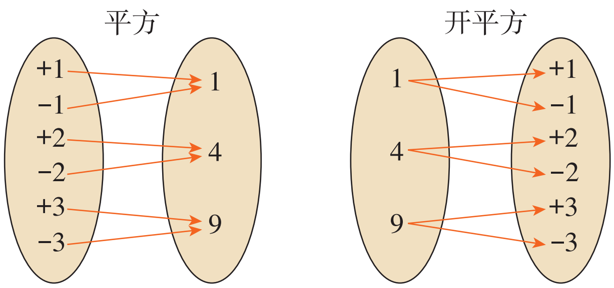


图 8.1-1

例 1 求下列各数的平方根：

（1）64；（2）$\frac{9}{100}$；（3）0.01.

解：(1) 因为$(\pm 8)^2=64$，所以 64 的平方根是± 8；

(2) 因为$\left(\pm\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$，所以$\frac{9}{100}$的平方根是$\pm\frac{3}{10}$；

(3) 因为$(\pm 0.1)^2=0.01$，所以 0.01 的平方根是± 0.1.

思考

正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

可以看出，**正数有两个平方根，它们互为相反数.**

因为$0^2=0$，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 **0 的平方根是 0.**

正数的平方是正数，负数的平方也是正数，0 的平方是 0，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不是负数，所以**负数没有平方根.**

正数a的正的平方根记为“$\sqrt{a}$”，读作“根号a”，a叫作**被开方数**；正数a的负的平方根可以用“$-\sqrt{a}$”表示，故正数a的平方根可以用“$\pm\sqrt{a}$”表示，读作“正、负根号a”. 例如，$\pm\sqrt{9}$表示 9 的平方根，$\pm\sqrt{9}=\pm 3$. 特别地，0 的平方根记为$\sqrt{0}$.

只有当a大于或等于 0 时，$\sqrt{a}$有意义；而当a小于 0 时，$\sqrt{a}$没有意义. 为什么？

例 2 下列各数有平方根吗？如果有，求它的平方根；如果没有，说明理由.

(1) 0.36；　　(2) -5；　　(3) $(-4)^2$.

解：(1) 因为 0.36 是正数，所以 0.36 有两个平方根，$\pm\sqrt{0.36}=\pm 0.6$；

(2) 因为-5是负数，所以-5没有平方根；

(3) 因为$(-4)^2=16$是正数，所以$(-4)^2$有两个平方根，

$$\pm\sqrt{(-4)^2}=\pm\sqrt{16}=\pm 4.$$

练习

1. 判断题.

(1) 1 的平方根是 1；　　(2) -1的平方根是-1；

(3) 0.5 是 0.25 的一个平方根；　　(4) 0 的平方根是 0.

人民教育出版社

2. 求下列各数的平方根：

（1）$\frac{64}{81}$；　　（2）6^2；　　（3）0.49.

3. 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^2=25$；　（2）$9x^2=4$；　（3）$(x-1)^2=1$.

我们知道，正数 a 有两个平方根，其中正的平方根$\sqrt{a}$叫作 a 的**算术平方根**. 正数 a 的算术平方根用$\sqrt{a}$来表示.

规定：**0 的算术平方根是 0.** 0 的算术平方根也记为$\sqrt{0}$.

例 3　求下列各数的算术平方根：

（1）100；　　（2）$\frac{49}{64}$；　　（3）0.000 1.

解：（1）因为 $10^2=100$，所以 100 的算术平方根是 10，即$\sqrt{100}=10$；

（2）因为$\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，所以$\frac{49}{64}$的算术平方根是$\frac{7}{8}$，即$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$；

（3）因为 $0.01^2=0.000\,1$，所以 0.000 1 的算术平方根是 0.01，即 $\sqrt{0.000\,1}=0.01$.

从例 3 可以看出：被开方数越大，对应的算术平方根就越大. 这个结论对所有正数都成立.

探究

怎样用两个面积为 1 dm^2 的小正方形拼成一个面积为 2 dm^2 的大正方形？这个大正方形的边长是多少？

如图 8.1-2，把两个小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角

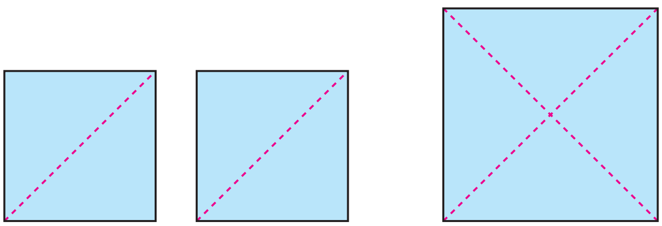


图 8.1-2

形拼在一起，就得到一个面积为 2 dm^2 的大正方形.

设大正方形的边长为 x dm，则

$$x^2=2.$$

由边长的实际意义可知

$$x=\sqrt{2},$$

所以大正方形的边长是 $\sqrt{2}$ dm.

小正方形的对角线的长是多少呢？

探究

$\sqrt{2}$ 有多大呢？

因为 $1^2=1$，$2^2=4$，$1^2<2<2^2$，所以

$$1<\sqrt{2}<2;$$

因为 $1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$，$1.4^2<2<1.5^2$，所以

$$1.4<\sqrt{2}<1.5;$$

因为 $1.41^2=1.988\ 1$，$1.42^2=2.016\ 4$，$1.41^2<2<1.42^2$，所以

$$1.41<\sqrt{2}<1.42;$$

因为 $1.414^2=1.999\ 396$，$1.415^2=2.002\ 225$，$1.414^2<2<1.415^2$，所以

$$1.414<\sqrt{2}<1.415;$$

……

如此进行下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的估计范围. 事实上，$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\cdots$，它是一个无限不循环小数.

实际上，很多正有理数的算术平方根（例如 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ 等）都是无限不循环小数.

无限不循环小数是指小数位数无限，且小数部分不循环的小数. 你以前见过这样的数吗？

练习

1. 求下列各数的算术平方根：

（1）0.09；　　（2）$\dfrac{81}{49}$；　　（3）5^2.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{36}$；　　(2) $-\sqrt{0.64}$；　　(3) $\pm\sqrt{\dfrac{16}{9}}$.

3. 排球比赛场地呈长方形，长是宽的 2 倍，面积为 162 m^2. 它的长与宽分别是多少？

大多数计算器都有√■键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）. 不同品牌的计算器，按键顺序有所不同.

例 4　用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{3\,136}$；　　(2) $\sqrt{2}$（结果保留小数点后三位）.

解：(1) 依次按键√■ 3 1 3 6 =，

显示：56.

所以$\sqrt{3\,136}=56$.

(2) 依次按键√■ 2 =，

显示：1.414213562.

所以$\sqrt{2}\approx1.414$.

计算器上显示的 1.414 213 562 是$\sqrt{2}$的近似值.

下面来解决本章引言中提出的问题.

由 $v^2=2gR$ 及 v 的实际意义，得 $v=\sqrt{2gR}$，其中 $g\approx9.8$（单位：m/s^2），$R\approx6.4\times10^6$（单位：m）. 用计算器求得

$$v\approx\sqrt{2\times9.8\times6.4\times10^6}=1.12\times10^4.$$

因此，第二宇宙速度 v 约为 1.12×10^4 m/s，即 11.2 km/s.

探究

(1) 用计算器计算下表中的算术平方根，并将计算结果填在表中，你发现了什么规律？

…	$\sqrt{0.062\,5}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6\,250}$	$\sqrt{62\,500}$	…
…								…

（2）用计算器计算$\sqrt{3}$（结果保留小数点后三位），并利用你在（1）中发现的规律求出$\sqrt{0.03}$，$\sqrt{300}$，$\sqrt{30\ 000}$的近似值，你能根据$\sqrt{3}$的值求出$\sqrt{30}$的近似值吗？

在日常生活中，我们经常遇到估计一个数的大小的问题.

例 5　小丽想用一块面积为 400 cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm^2 的长方形纸片，使它的长与宽的比为 3∶2. 但她不知道能否裁得出来，正在发愁，小明见了说：“别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片！”

你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出想要的纸片吗？

解：设长方形纸片的长为 $3x$ cm，宽为 $2x$ cm.

根据边长与面积的关系，得

$$3x \cdot 2x = 300,$$

$$6x^2 = 300,$$

$$x^2 = 50.$$

由边长的实际意义，得

$$x = \sqrt{50}.$$

因此长方形纸片的长为 $3\sqrt{50}$ cm.

$3\sqrt{50}$就是$3\times\sqrt{50}$.

因为 $50>49$，所以$\sqrt{50}>7$.

由上可知 $3\sqrt{50}>21$，即长方形纸片的长应该大于 21 cm.

因为$\sqrt{400}=20$，所以正方形纸片的边长只有 20 cm. 这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答：不同意小明的说法，小丽不能用这块纸片裁出想要的纸片.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{961}$；　(2) $\sqrt{96.04}$；　(3) $\sqrt{403}$（结果保留小数点后三位）.

2. 下列各数分别介于哪两个相邻的整数之间？

(1) $\sqrt{5}$；　(2) $\sqrt{26}$；　(3) $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

3. 长方形画纸的面积为 700 cm^2，长与宽的比为 5∶4. 王芳想从中裁出半径为 12 cm 的圆形画纸，她的想法可行吗？

习题 8.1

复习巩固

1. 求下列各数的平方根：

(1) 81；　(2) $\frac{1}{10^6}$；　(3) 0.001 6.

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) $\frac{25}{64}$；　(2) 0.04；　(3) 10^2.

3. 判断题.

(1) $\sqrt{5}$是 5 的一个平方根；

(2) $(-3)^2$的算术平方根是-3；

(3) $\sqrt{4}$的平方根是± 2；

(4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

4. 用计算器求下列各式的值（结果保留小数点后两位）：

(1) $\sqrt{408}$；　(2) $\sqrt{51.42534}$；　(3) $\sqrt{\frac{111}{4}}$.

5. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{65}$与 8；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$与$\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(3) $\frac{\sqrt{10}-1}{2}$与 1.

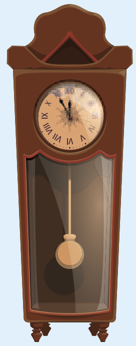
综合运用

6. 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^2-100=0$；　（2）$25x^2=36$；　（3）$(x+2)^2=0.49$.

7. 估算面积为 3 dm^2 的正方形的边长是多少分米（结果保留小数点后两位）.

8. 如图，摆钟的钟摆自由摆动，摆动一个来回所用的时间 t（单位：s）与钟摆的长度 l（单位：m）之间满足 $t=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. 当钟摆的长度为 0.25 m 时，摆动一个来回所用的时间是多少秒？（π 取 3.14，g 取 9.8 m/s^2. 结果保留小数点后两位.）



（第 8 题）

9. 一个正方形的面积扩大为原来的 4 倍，它的边长变为原来的多少倍？面积扩大为原来的 9 倍呢？n 倍呢？

拓广探索

10. （1）求 $(\sqrt{0})^2$，$(\sqrt{4})^2$，$(\sqrt{9})^2$，$(\sqrt{25})^2$，$(\sqrt{36})^2$ 的值. 对于任意非负数 a，$(\sqrt{a})^2$ 等于多少？

（2）求 $\sqrt{0^2}$，$\sqrt{2^2}$，$\sqrt{(-3)^2}$，$\sqrt{5^2}$，$\sqrt{(-6)^2}$ 的值. 对于任意数 a，$\sqrt{a^2}$ 等于多少？

11. 任意找一个正数，比如 1 234，利用计算器对它开平方，再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去，你有什么发现？

8.2 立方根

在上一节，我们通过研究平方的逆运算学习了平方根，本节来研究立方的逆运算.

思考

如果一个数的立方等于 8，那么这个数是多少?

因为 $2^3=8$，所以这个数可以是 2. 除 2 以外，任何一个数的立方都不等于 8. 因此，如果一个数的立方等于 8，那么这个数是 2.

一般地，如果一个数 x 的立方等于 a，即 $x^3=a$，那么这个数 x 叫作 a 的**立方根**（cube root）或**三次方根**. 例如，2 是 8 的立方根. 求一个数的立方根的运算，叫作**开立方**.

到了高中，我们将学习一般的开方运算.

正如开平方与平方互为逆运算一样，开立方与立方也互为逆运算. 根据这种互逆关系，可以求一个数的立方根.

探究

根据立方根的意义填空：

因为 $1^3=1$，所以 1 的立方根是（　　）;

因为（　　）$^3=0.064$，所以 0.064 的立方根是（　　）;

因为（　　）$^3=-8$，所以 -8 的立方根是（　　）;

因为（　　）$^3=-\dfrac{1}{8}$，所以 $-\dfrac{1}{8}$ 的立方根是（　　）;

因为（　　）$^3=0$，所以 0 的立方根是（　　）.

你能发现正数的立方根有什么特点吗? 负数呢? 0 的立方根是多少?

归纳

正数的立方根是正数，

负数的立方根是负数，

0 的立方根是 0.

你能说一说数的立方根与数的平方根有什么不同吗?

人民教育出版社

类似于平方根，一个数 a 的立方根记为“$\sqrt[3]{a}$”，读作“三次根号 a”，其中 a 是被开方数，3 是**根指数**. 例如，$\sqrt[3]{8}$ 表示 8 的立方根，$\sqrt[3]{8}=2$；$\sqrt[3]{-8}$ 表示 -8 的立方根，$\sqrt[3]{-8}=-2$. $\sqrt[3]{a}$ 中的根指数“3”不能省略.

$\sqrt{a}$ 实际上省略了 $\sqrt[2]{a}$ 中的根指数 2，因此 $\sqrt{a}$ 也可以读作“二次根号 a”.

例 1 求下列各数的立方根：

（1）$(-2)^3$；　（2）343；　（3）-64；　（4）$\dfrac{125}{27}$.

解：（1）$(-2)^3$ 的立方根是 -2，即 $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$；

（2）因为 $7^3=343$，所以 343 的立方根是 7，即 $\sqrt[3]{343}=7$；

（3）因为 $(-4)^3=-64$，所以 -64 的立方根是 -4，即 $\sqrt[3]{-64}=-4$；

（4）因为 $\left(\dfrac{5}{3}\right)^3=\dfrac{125}{27}$，所以 $\dfrac{125}{27}$ 的立方根是 $\dfrac{5}{3}$，即 $\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}=\dfrac{5}{3}$.

练习

1. 判断题.

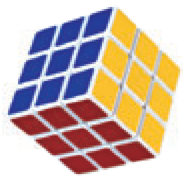
（1）-3 是 -27 的立方根；　（2）± 3 是 27 的立方根；

（3）$(-1)^3$ 的立方根是 -1；　（4）$\sqrt[3]{-8}$ 的立方根是 -2.

2. 求下列各数的立方根：

（1）-1；　（2）0.008；　（3）$-\dfrac{64}{27}$.

3. 如图是一种形状为正方体的魔方，它的体积为 216 cm^3，它的棱长是多少？



（第 3 题）

下面，我们探究互为相反数的两个数的立方根的关系.

探究

计算 $\sqrt[3]{8}$ 和 $\sqrt[3]{-8}$，它们有什么关系？$\sqrt[3]{27}$ 和 $\sqrt[3]{-27}$ 呢？你能从中发现什么规律？

一般地，$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{-512}$；　(2) $-\sqrt[3]{-0.001}$；　(3) $\sqrt[3]{-4^3}$.

解：(1) $\sqrt[3]{-512}=-\sqrt[3]{512}=-8$；

(2) $-\sqrt[3]{-0.001}=\sqrt[3]{0.001}=0.1$；

(3) $\sqrt[3]{-4^3}=-\sqrt[3]{4^3}=-4$.

在例 1、例 2 中，我们是利用开立方与立方的关系求立方根的. 实际上，很多有理数的立方根（如$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[3]{4}$等）是无限不循环小数，我们可以用有理数近似地表示它们.

一些计算器设有$\sqrt[3]{\blacksquare}$键，用它可以求出一个数的立方根（或其近似值）. 例如，用计算器求$\sqrt[3]{2\ 197}$，只需依次按键$\sqrt[3]{\blacksquare}$②①⑨⑦⊜，显示：13，所以$\sqrt[3]{2\ 197}=13$. 用计算器求$\sqrt[3]{3}$，只需依次按键$\sqrt[3]{\blacksquare}$③⊜，显示$\sqrt[3]{3}$的近似值：1.442249570，所以$\sqrt[3]{3}\approx 1.442$.

有些计算器需要调用备用功能$\sqrt[3]{\blacksquare}$求一个数的立方根，具体操作参见计算器的使用说明.

探究

用计算器计算…，$\sqrt[3]{0.000\ 216}$，$\sqrt[3]{0.216}$，$\sqrt[3]{216}$，$\sqrt[3]{216\ 000}$，…，你能发现什么规律？用计算器计算$\sqrt[3]{100}$（结果保留小数点后三位），并利用你发现的规律求出$\sqrt[3]{0.1}$，$\sqrt[3]{0.000\ 1}$，$\sqrt[3]{100\ 000}$的近似值.

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{0.027}$；　(2) $\sqrt[3]{(-7)^3}$；　(3) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$.

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{6\ 859}$；　(2) $\sqrt[3]{68\ 921}$；

(3) $\sqrt[3]{0.028\ 092}$（结果保留小数点后三位）.

3. 下列各数分别介于哪两个相邻的整数之间？

(1) $\sqrt[3]{7}$；　(2) $\sqrt[3]{99}$；　(3) $\sqrt[3]{635}$；　(4) $\sqrt[3]{-28}$.

习题 8.2

复习巩固

1. 求下列各式的值：

（1）$-\sqrt[3]{0.125}$；　（2）$-\sqrt[3]{729}$；　（3）$\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$.

2. 用计算器求下列各式的值（结果保留小数点后三位）：

（1）$\sqrt[3]{5\,572}$；　（2）$-\sqrt[3]{\frac{1}{13}}$；　（3）$\pm\sqrt[3]{25.986\,558}$.

3. 比较下列各组数的大小：

（1）$\sqrt[3]{7}$ 与 2；　（2）$\sqrt[3]{9}$ 与 2.5；　（3）$-\sqrt[3]{3}$ 与 $-\frac{3}{2}$.

综合运用

4. 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^3=-0.064$；　（2）$x^3-3=\frac{3}{8}$；　（3）$(x+1)^3=8$.

5. 把一个长、宽、高分别为 21 dm，20 dm，19 dm 的长方体铁块熔化后铸成一个正方体铁块（不计损耗），这个正方体的棱长是多少分米（结果保留小数点后两位）？

6. 如图是一种圆柱形升降阻车桩，它的体积为 22 600 cm^3，高 h 等于底面半径 r 的 5.48 倍，底面半径 r 是多少厘米？（π 取 3.14，结果保留小数点后两位.）

（第 6 题）

7. 一个正方体的体积扩大为原来的 8 倍，它的棱长变为原来的多少倍？扩大为原来的 27 倍呢？n 倍呢？

拓广探索

8. （1）求 $(\sqrt[3]{0})^3$，$(\sqrt[3]{8})^3$，$(\sqrt[3]{-8})^3$，$(\sqrt[3]{27})^3$，$(\sqrt[3]{-27})^3$ 的值. 对于任意数 a，$(\sqrt[3]{a})^3$ 等于多少？

（2）求 $\sqrt[3]{0^3}$，$\sqrt[3]{2^3}$，$\sqrt[3]{(-2)^3}$，$\sqrt[3]{(-3)^3}$，$\sqrt[3]{4^3}$ 的值. 对于任意数 a，$\sqrt[3]{a^3}$ 等于多少？

9. 任意找一个数，比如 1 234，利用计算器对它开立方，再对得到的立方根开立方……如此进行下去，你有什么发现？

8.3 实数及其简单运算

在前面的学习中，我们通过引入一类新的数——负数，使数的范围扩充到有理数．本章我们认识了像$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$这样的无限不循环小数，它们是有理数吗？如果不是，我们将再次扩充数的范围．

探究

把下列有理数写成小数的形式，你发现了什么？

$$4，\frac{5}{2}，-\frac{3}{5}，\frac{27}{4}，\frac{11}{9}，\frac{9}{11}.$$

可以发现，上面的有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式，即

$$4=4.0，\frac{5}{2}=2.5，-\frac{3}{5}=-0.6，$$

$$\frac{27}{4}=6.75，\frac{11}{9}=1.\dot{2}，\frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}.$$

整数可以写成小数点后为 0 的小数．

事实上，任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式．反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数．

通过前两节的学习，我们知道，很多数的平方根、立方根是无限不循环小数，例如$\sqrt{2}$，$-\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$等．$\pi=3.141\,592\,65\cdots$也是无限不循环小数．从上面的讨论可知，无限不循环小数都不是有理数．无限不循环小数又叫作**无理数**（irrational number）．

无理数是不能写成两个整数之比（分数）的数，它和有理数一样，都是现实世界中客观存在的量的反映．

像有理数一样，无理数也有正负之分．例如，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，π是正无理数，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{3}$，$-\pi$是负无理数．

溯源

我国古人对无理数已经有了很多认识.《九章算术》中用“面”来表示开平方开不尽的数. 刘徽在其著作《九章算术注》中，不仅记录了包含无理数运算的问题，而且给出了用有限小数无限逼近无理数的算法“求微数法”.

有理数和无理数统称**实数**（real number）. 这样，我们学过的数可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

由于非 0 有理数和无理数都有正负之分，所以非 0 实数也有正负之分，于是实数也可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\0\\\text{负实数}\end{cases}$$

与有理数可以用数轴上的点表示类似，无理数也可以用数轴上的点表示. 数轴上表示正无理数 a 的点在数轴的正半轴上，与原点的距离是 a 个单位长度；表示负无理数 $-b$（$b>0$）的点在数轴的负半轴上，与原点的距离是 b 个单位长度. 下面，我们以 π，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$ 为例，看一看如何在数轴上表示无理数.

思考

以单位长度为直径画一个圆，它的周长等于 π. 如图 8.3-1，从原点开始，将这个圆沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点 O 到达点 O'，点 O' 对应的数是多少？

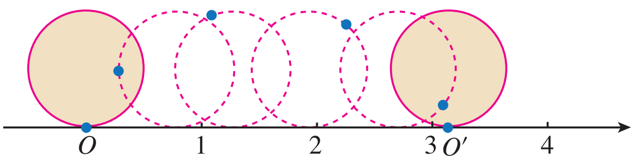


图 8.3-1

从图 8.3-1 中可以看出，OO'的长是这个圆的周长 π，所以点 O'对应的数是 π. 这样，数轴上的点 O'就表示无理数 π.

以单位长度为边长画一个正方形（图 8.3-2），以原点为圆心，正方形的对角线长为半径画弧，与正半轴的交点就表示$\sqrt{2}$，与负半轴的交点就表示$-\sqrt{2}$.（为什么？）

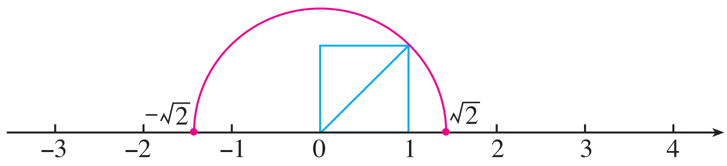


图 8.3-2

当数的范围从有理数扩充到实数后，每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数. 因此，实数与数轴上的点是一一对应的.

与规定有理数的大小一样，对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大.

练习

1. 判断题.

   （1）无限小数都是无理数；

   （2）无理数都是无限小数；

   （3）用根号表示的数都是无理数；

   （4）所有有理数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上的所有点都表示有理数；

   （5）所有实数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上的所有点都表示实数.

2. 在 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的平方根与立方根中，哪些是有理数？哪些是无理数？

3. 把下列实数表示在数轴上，并比较它们的大小（用“$<$”连接）：

$$-2，\sqrt{2}，\frac{3}{2}，-\pi.$$

人民教育出版社

有理数关于相反数和绝对值的意义同样适用于实数.

思考

(1) $\sqrt{2}$ 的相反数是____，$-\pi$ 的相反数是____，0 的相反数是____；

(2) $|\sqrt{2}|=$____，$|-\pi|=$____，$|0|=$____.

一般地，对于实数，同样有

数 a 的相反数是 $-a$.

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0. 即设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases}a，当 a>0 时；\\0，当 a=0 时；\\-a，当 a<0 时.\end{cases}$$

一个实数的绝对值就是它在数轴上的对应点与原点的距离.

例 1 (1) 分别写出 $-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数；

(2) 指出 $-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$ 分别是什么数的相反数；

(3) 求 $\sqrt[3]{-64}$ 的绝对值；

(4) 已知一个数的绝对值是 $\sqrt{3}$，求这个数.

解： (1) 因为

$$-(-\sqrt{6})=\sqrt{6}，-(\pi-3.14)=3.14-\pi，$$

所以 $-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数分别为 $\sqrt{6}$，$3.14-\pi$.

(2) 因为

$$-(\sqrt{5})=-\sqrt{5}，-(\sqrt[3]{3}-1)=1-\sqrt[3]{3}，$$

所以 $-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$ 分别是 $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{3}-1$ 的相反数.

(3) 因为

$$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4，$$

所以

$$|\sqrt[3]{-64}|=|-4|=4.$$

(4) 因为

人民教育出版社

$$|\sqrt{3}|=\sqrt{3},\quad |-\sqrt{3}|=\sqrt{3},$$

所以绝对值为$\sqrt{3}$的数是$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方运算，而且正数及 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算．在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

> 随着数的范围的进一步扩充，负数也将可以进行开平方运算.

例 2　计算：

（1）$(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}$；　　（2）$3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$.

解：（1）$(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}+(\sqrt{2}-\sqrt{2})$（加法结合律）

$=\sqrt{3}+0$

$=\sqrt{3}$；

（2）$3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$=(3+2)\sqrt{3}$（分配律）

$=5\sqrt{3}$.

在实数运算中，当遇到无理数并且需要求出计算结果的近似值时，一般先用近似有限小数（例如，比计算结果要求的精确度多取一位）去代替无理数，再进行计算，最后对计算结果四舍五入.

> 在近似计算时，计算过程中有时也使用"去尾法"，即用近似有限小数去代替无理数时，直接舍去要保留数位的下一位数字，最后对计算结果四舍五入．如$\sqrt{5}-\sqrt{7}\approx 2.236-2.645\approx -0.41$.

例 3　计算（结果保留小数点后两位）：

（1）$\sqrt{5}-\sqrt{7}$；　　（2）$\pi\cdot\sqrt[3]{3}$.

解：（1）$\sqrt{5}-\sqrt{7}\approx 2.236-2.646=-0.41$；

（2）$\pi\cdot\sqrt[3]{3}\approx 3.142\times 1.442\approx 4.53$.

练习

1. 求下列各数的相反数与绝对值：

$$\sqrt{13},\ -\sqrt{7},\ -\frac{\pi}{2},\ 1.4-\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 0.$$

2. 计算：

（1）$2\sqrt{5}-3\sqrt{5}$；　　（2）$\sqrt[3]{3}-|1-\sqrt[3]{3}|$.

3. 计算（结果保留小数点后两位）：

（1）$\sqrt{17}+\sqrt{22}$；　　（2）$\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}$.

习题 8.3

复习巩固

1. 在下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$$3.14,\ \left|-\frac{22}{7}\right|,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ -\sqrt{6},\ \sqrt{36},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{125}.$$

2. 把下列实数表示在数轴上，并比较它们的大小（用“$<$”连接）：

$$-\frac{1}{3},\ -1.5,\ 2\sqrt{2},\ |-3|.$$

3. 求下列各数的绝对值：

$$\sqrt[3]{-8},\ \sqrt{17},\ -\frac{\sqrt{2}}{3},\ \sqrt{3}-2,\ 1-\sqrt[3]{2}.$$

4. 计算（结果保留小数点后两位）：

（1）$\pi-\sqrt{10}$；（2）$3\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$.

5. 计算：

（1）$2(\sqrt{6}-\sqrt{7})-|2\sqrt{6}-\sqrt{7}|$；（2）$(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt[3]{2})^3$.

综合运用

6. （1）有没有最小的正整数？有没有最小的整数？

（2）有没有最小的有理数？有没有最小的无理数？

（3）有没有最小的正实数？有没有最小的实数？

7. 写出所有符合下列条件的数：

（1）小于$\sqrt{37}$的所有正整数；

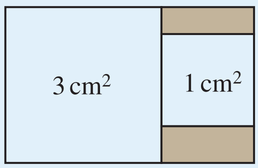
（2）大于$-\sqrt{10}$且小于$\sqrt{10}$的所有整数；

（3）绝对值小于$\sqrt{6}$的所有整数.

8. 如图，长方形内两个正方形的面积分别为 3 cm^2，1 cm^2.

（1）求长方形的周长；

（2）求图中两块阴影部分的面积和.



（第 8 题）

拓广探索

9. 已知数 0.101 001 000 100 001…，它的特点是：从左向右看，相邻的两个 1 之间依次多一个 0. 这个数是有理数还是无理数？为什么？

阅读与思考

为什么$\sqrt{2}$不是有理数

毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—约前 500）

古希腊有个毕达哥拉斯学派，他们认为“万物皆数”，即一切量都可以用整数或整数的比表示. 后来毕达哥拉斯学派发现，边长为 1 的正方形的对角线的长不能表示为整数或整数之比（即$\sqrt{2}$不是有理数），对此他们感到惊恐不安. 由此，引发了第一次数学危机.

事实上，“$\sqrt{2}$不是有理数”是可以证明的，下面给出一种证明方法.

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么存在两个互质的正整数 p，q，使得

$$\frac{p}{q}=\sqrt{2},$$

于是

$$p=\sqrt{2}q.$$

两边平方得

$$p^2=2q^2.$$

由 $2q^2$ 是偶数，得 p^2 是偶数，而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 也是偶数.

因此可设 $p=2r$（r 是正整数），代入上式，得 $4r^2=2q^2$，即

$$q^2=2r^2.$$

所以 q 也是偶数. 这样，p，q 都是偶数，与假设 p，q 互质矛盾.

这个矛盾说明，$\sqrt{2}$不能写成分数的形式，即$\sqrt{2}$不是有理数.

历史上，人们对无理数的认识经历了曲折、漫长的过程，直到 19 世纪下半叶，才最终给出了无理数的严格定义. 这时，实数的理论体系才建立起来，持续两千多年的第一次数学危机终于结束了.

人民教育出版社

数学活动

活动1　估算A0纸的长与宽

按照国际标准，A 系列纸为长方形，其中 A0 纸的面积为 1 m^2. 将 A0 纸沿长边对折、裁开，便成 A1 纸；将 A1 纸沿长边对折、裁开，便成 A2 纸；将 A2 纸沿长边对折、裁开，便成 A3 纸；将 A3 纸沿长边对折、裁开，便成 A4 纸……

将 A4 纸按如图 1 所示的方式折叠，你有什么发现？你能据此估算 A0 纸的长与宽分别是多少毫米吗（结果取整数）？

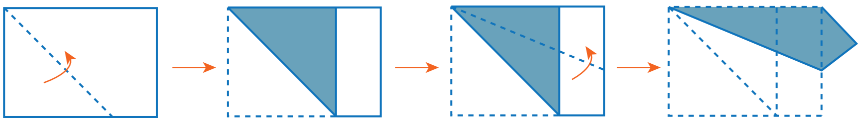


图 1

活动2　口算求立方根

我国著名数学家华罗庚有一次在飞机上看到他的助手阅读的杂志上有一道智力题：一个数是 59 319，求它的立方根. 华罗庚脱口而出：39.

华罗庚（1910—1985）

你知道华罗庚是怎样准确迅速地计算出来的吗？按照下面的方法试一试：

（1）由 $10^3=1\ 000$，$100^3=1\ 000\ 000$，你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 是几位数吗？

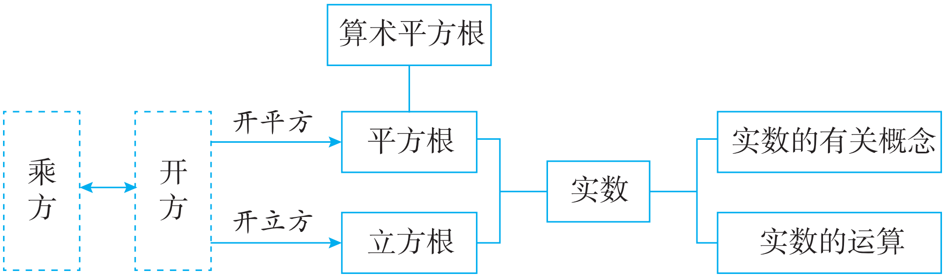
（2）由 59 319 的个位上的数是 9，你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的个位上的数是几吗？

（3）如果划去 59 319 后面的三位 319 得到数 59，而 $3^3=27$，$4^3=64$，由此你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的十位上的数是几吗？

已知 19 683，110 592 都是整数的立方，按照上述方法，你能确定它们的立方根吗？

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们学习了平方根和立方根，并通过开平方、开立方运算认识了一些不同于有理数的数，在此基础上引入无理数，使数的范围从有理数扩充到实数. 随着数的范围的扩充，数的运算也有了新的发展. 在实数范围内，不仅能进行加、减、乘、除四则运算，而且对 0 和任意正数能进行开平方运算，对任意实数能进行开立方运算，由此你的运算能力也得到了提升.

在本章中，我们类比有理数及其运算，引入了实数的相反数、绝对值等概念以及实数的运算和运算律；类比用数轴上的点表示有理数，用数轴上的点表示无理数. 学习时应注意体会“类比”这种思想方法的作用. 由于实数与数轴上的点是一一对应的，所以我们可以利用数轴将数与形联系起来，借助几何直观理解实数的有关概念及运算.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 什么是平方根？什么样的数有平方根？

2. 什么是算术平方根？平方根与算术平方根有什么联系和区别？

3. 什么是立方根？任何实数都有立方根吗？

4. 开平方与平方有怎样的关系？开立方与立方呢？

5. 什么是无理数？无理数与有理数有什么区别？举例说明，怎样用有理数估计一个开方开不尽的数的范围.

6. 实数由哪些数组成？实数与数轴上的点有怎样的对应关系？

7. 数的范围是如何从正整数逐步扩充到实数的？随着数的范围的不断扩充，数的运算有什么发展？加法与乘法的运算律始终保持不变吗？

复习题 8

复习巩固

1. 求下列各数的平方根及算术平方根：

（1）0.36；　（2）$\frac{25}{16}$；　（3）$\left(-\frac{7}{8}\right)^2$；　（4）$10^4$.

2. 求下列各数的立方根：

（1）$\frac{27}{8}$；　（2）$-\frac{1}{64}$；　（3）-0.729；　（4）3^6.

3. 求下列各式的值：

（1）$-\sqrt{1-\frac{16}{25}}$；　（2）$\sqrt[3]{10^3}$；　（3）$\pm\sqrt{0.09}$；　（4）$\sqrt{(3-\pi)^2}$.

4. 用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt{180\ 625}$；　（2）$-\sqrt{9.77}$（结果保留小数点后三位）；

（3）$\sqrt[3]{39\ 304}$；　（4）$\sqrt[3]{0.43}$（结果保留小数点后三位）.

5. 计算：

（1）$\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$；　（2）$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. 下列各数分别介于哪两个相邻的整数之间？与哪个整数更接近？

（1）$\sqrt{91}$；　（2）$\sqrt[3]{91}$.

综合运用

7. 已知 $|x|<\pi$（x 是整数），求 x 的值，并在数轴上表示求得的数.

8. 一个圆与一个正方形的面积都是 $2\pi\ \text{cm}^2$，它们中哪一个的周长较大？你能从中得到什么启示？

9. 天气晴朗时，一个人站在海边能看到大海的最远距离 s（单位：km）可用 $s^2=16.74h$ 来估计，其中 h（单位：m）为眼睛到海平面的距离. 王芳站在海边观

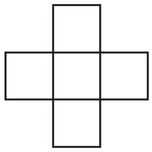
察，眼睛到海平面的距离为 1.5 m，她能看到的最远距离是多少千米？如果她站在海边的岩石上，眼睛到海平面的距离为 8.7 m，她能看到的最远距离是多少千米？（结果保留小数点后两位.）

10. 将一正方体铁块完全浸入圆柱形玻璃杯的水中，水位升高了 58 mm. 如果玻璃杯内部的底面半径为 95 mm，那么正方体的棱长是多少毫米？（π 取 3.14，结果取整数.）

拓广探索

11. （1）怎样把由 5 个边长为 1 的小正方形组成的图形（如图）剪拼成一个大正方形？

（2）在数轴上画出这个大正方形的边长所对应的点.



（第 11 题）

第九章　平面直角坐标系

在庆祝中华人民共和国成立 70 周年联欢活动中，天安门广场上出现了“祖国万岁”等壮观的图案，你知道它们是怎么组成的吗？

原来，表演现场设置了由有序数对标识的点位，3 000 多名表演者手举光影屏，根据预先编排的流程，不停地变换所在的点位，就拼出了不同的图案. 类似于生活中用有序数对确定位置，在数学中可以通过建立平面直角坐标系，用坐标来刻画平面内点的位置.

在本章中，我们将学习平面直角坐标系等有关知识，由此建立图形与数量之间的联系. 这将为几何问题和代数问题的相互转化打下基础.

9.1 用坐标描述平面内点的位置

本章引言中的点位是用小学学过的有序数对表示的，它刻画了天安门广场表演区内点的位置. 本节我们继续学习刻画平面内点的位置的方法.

9.1.1 平面直角坐标系的概念

我们知道，数轴上的点与实数是一一对应的，数轴上每个点都对应一个实数，这个实数叫作这个点在数轴上的坐标. 例如，在图 9.1-1 的数轴上，点 A 的坐标为-4，点 B 的坐标为 2. 反过来，知道数轴上一个点的坐标，这个点在数轴上的位置也就确定了. 例如，在图 9.1-1 的数轴上，坐标为 5 的点是点 C. 这样，利用数轴上点的坐标，可以确定直线上点的位置.

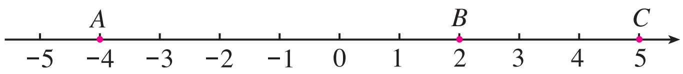


图 9.1-1

思考

类似于利用数轴确定直线上点的位置，能不能找到一种办法来确定平面内点的位置呢（例如图 9.1-2 中 A，B，C，D，E 各点）？

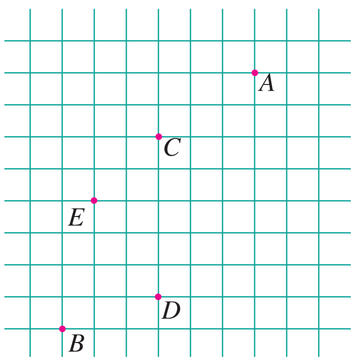


图 9.1-2

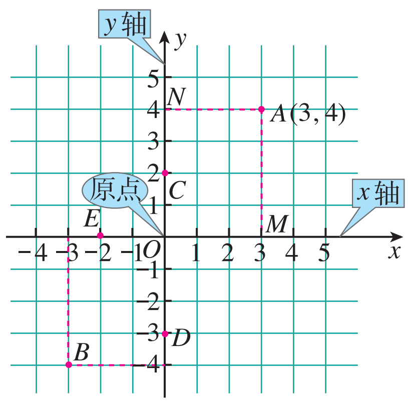


图 9.1-3

如图 9.1-3，我们可以在平面内画两条互相垂直、原点重合的数轴，组成**平面直角坐标系**（rectangular plane coordinates system）. 水平的数轴称为 **x 轴**

或**横轴**，习惯上取向右为正方向；竖直的数轴称为 y **轴**或**纵轴**，习惯上取向上为正方向；两坐标轴的交点 O 称为平面直角坐标系的**原点**.

有了平面直角坐标系，平面内的点就可以用一个有序数对来表示了. 例如，如图 9.1-3，由点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 3，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 4，我们说点 A 的横坐标是 3，纵坐标是 4，有序数对 (3，4) 就叫作点 A 的**坐标**，记作"$A(3，4)$". 类似地，请你写出点 B，C，D，E 的坐标：B(______，______)，C(______，______)，D(______，______)，E(______，______).

思考

原点 O 的坐标是什么？x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特点？

可以看出，原点 O 的坐标为 (0，0)；x 轴上的点的纵坐标为 0，例如 (1，0)，(−1，0)，…；y 轴上的点的横坐标为 0，例如 (0，1)，(0，−1)，….

建立平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分（图 9.1-4），每个部分称为**象限**，它们分别叫作第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 坐标轴上的点不属于任何象限.

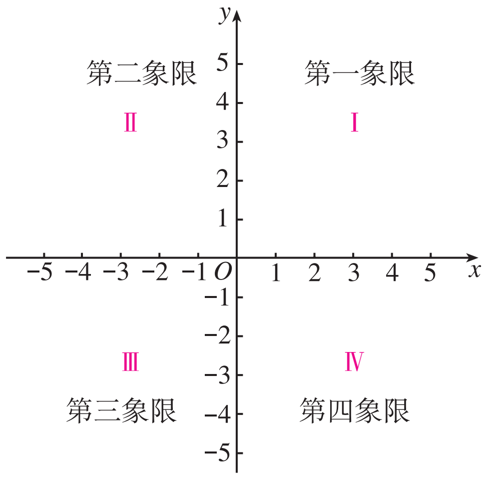


图 9.1-4

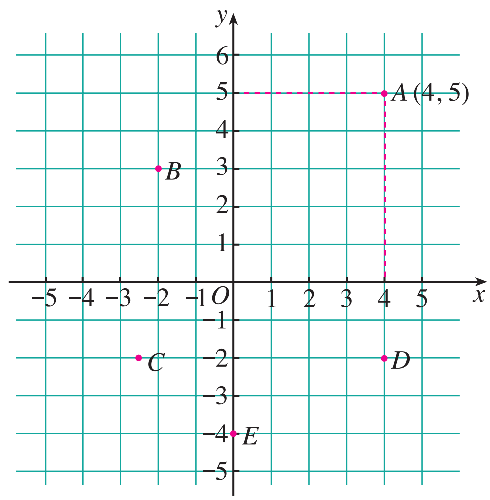


图 9.1-5

例 1 在平面直角坐标系中描出下列各点：

$A(4，5)$，$B(-2，3)$，$C(-2.5，-2)$，$D(4，-2)$，$E(0，-4)$.

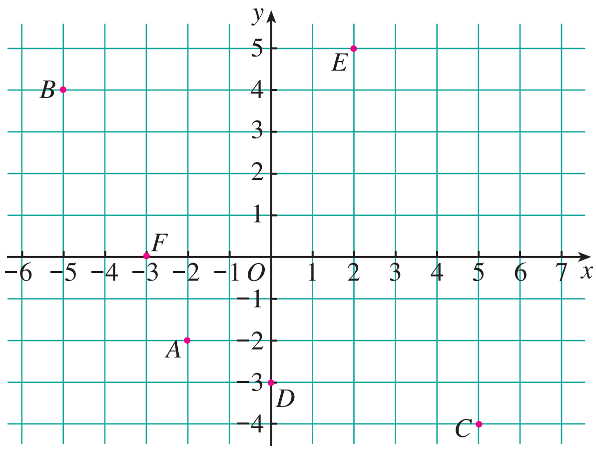
解： 如图 9.1-5，先在 x 轴上找出表示 4 的点，再在 y 轴上找出表示 5 的点，过这两个点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A.

类似地，可在图 9.1-5 中描出点 B，C，D，E.

类比数轴上的点与实数是一一对应的，对于坐标平面内任意一点 M，都有唯一的一个有序实数对（x，y）（即点 M 的坐标）和它对应；反过来，对于任意一个有序实数对（x，y），在坐标平面内都有唯一的一点 M（即坐标为（x，y）的点）和它对应. 也就是说，坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的. 这样，利用坐标平面内点的坐标，可以确定平面内点的位置.

练习

1. 写出图中点 A，B，C，D，E，F 的坐标.



（第 1，2 题）

2. 在如图所示的平面直角坐标系中描出下列各点：

$$L(-5,\ -3),\ M(4,\ 0),\ N(-6,\ 2),$$
$$P(5,\ -3.5),\ Q(0,\ 5),\ R(6,\ 2).$$

3. 根据点所在的位置，用“＋”“－”填表.

点的位置	横坐标符号	纵坐标符号
在第一象限	＋	＋
在第二象限		
在第三象限		
在第四象限		

9.1.2　用坐标描述简单几何图形

几何图形都是由点组成的，坐标可以描述平面内点的位置，因而就可以描述一些几何图形.

探究

如图 9.1-6，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，如果以点 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，那么以哪条线为 y 轴？写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标.

请另建立一个平面直角坐标系，这时正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标又分别是什么？与同学交流一下.

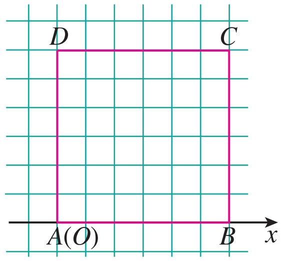


图 9.1-6

显然，这样建立的平面直角坐标系以 AD 所在直线为 y 轴. 当取 1 个单位长度代表长度“1”时，正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标分别是 (0，0)，(6，0)，(6，6)，(0，6). 若以 AB 的中点为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，当取 1 个单位长度代表长度“1”时，则正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标分别是 (−3，0)，(3，0)，(3，6)，(−3，6).

一般地，可以建立平面直角坐标系来描述一些简单几何图形. 在用坐标描述简单几何图形时，只需用坐标描述这些图形上关键点的位置. 这时，建立的平面直角坐标系不同，图形上点的坐标也不同. 为了能方便地写出图形上点的坐标，在建立平面直角坐标系时，要考虑图形的形状特征.

类似地，在平面直角坐标系中，由简单几何图形的一些关键点（例如顶点）的坐标，可以确定这些关键点的位置，进而确定这个简单几何图形.

例 2　在平面直角坐标系中，长方形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(-3, 2)$，$B(-3, -2)$，$C(3, -2)$，$D(3, 2)$. 画出长方形 $ABCD$.

分析：一个长方形四个顶点的位置确定了，这个长方形就确定了. 在平面直角坐标系中，由顶点坐标描出长方形 $ABCD$ 的四个顶点，就可以画出这个长方形.

解：如图 9.1-7，由长方形 $ABCD$ 的顶点坐标

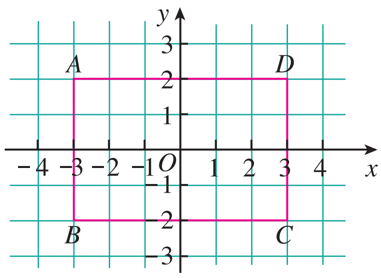
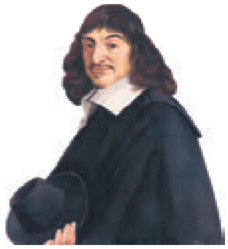


图 9.1-7

分别为 $A(-3,\ 2)$，$B(-3,\ -2)$，$C(3,\ -2)$，$D(3,\ 2)$，描出点 A，B，C，D，连接 AB，BC，CD，DA，就可以画出长方形 $ABCD$.

溯源

17 世纪，法国数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）引入坐标系，用方程表示曲线，开了用代数方法解决几何问题的先河. 从那以后，数学的面貌发生了划时代的变化，代数和几何两大领域更加密切地联系起来.



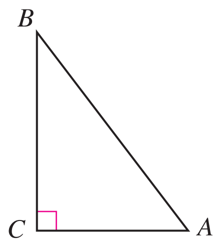
练习

1. 方格纸上有 A，B 两点，若以点 B 为原点建立平面直角坐标系，则点 A 的坐标为 $(-2,\ 1)$. 若以点 A 为原点建立平面直角坐标系，则点 B 的坐标为（　　）.

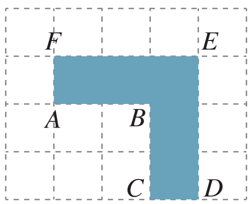
   (A) $(-2,\ 1)$　　(B) $(2,\ -1)$

   (C) $(-2,\ -1)$　　(D) $(2,\ 1)$

2. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$. 建立平面直角坐标系，写出三角形 ABC 三个顶点的坐标.



（第 2 题）



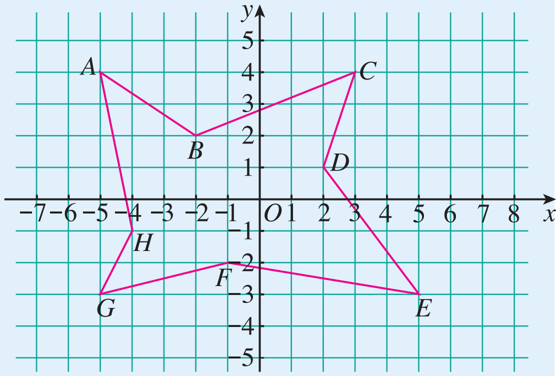
（第 3 题）

3. 如图是一个角钢的横截面，建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示角钢各顶点的位置（图中小正方形的边长代表 10 cm 长）.

习题 9.1

复习巩固

1. 如图，写出标有字母的各点的坐标，并指出它们的横坐标和纵坐标.



（第 1 题）

2. 在平面直角坐标系中，标出下列各点：

   点 A 在 y 轴上，位于原点上方，距离原点 2 个单位长度；

   点 B 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 1 个单位长度；

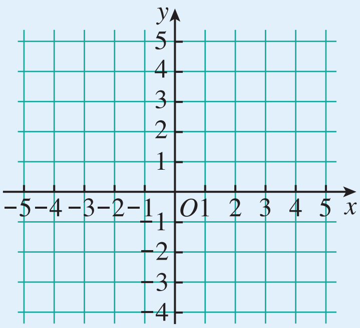
   点 C 在 x 轴上方，y 轴右侧，到每条坐标轴的距离都是 2 个单位长度；

   点 D 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 3 个单位长度；

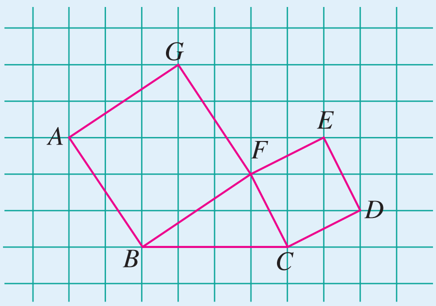
   点 E 在 x 轴上方，y 轴右侧，到 x 轴的距离是 2 个单位长度，到 y 轴的距离是 4 个单位长度.

   依次连接这些点，你得到了什么图形？

3. 如图，在所给的平面直角坐标系中描出点 $A(-4，-4)$，$B(-2，-2)$，$C(3，3)$，$D(5，5)$，$E(-3，-3)$，$F(0，0)$. 这些点有什么关系？你能再找出一些类似的点吗？



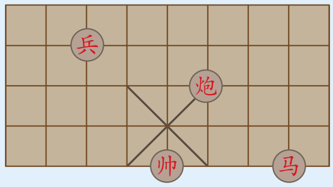
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，建立平面直角坐标系，使点 B，C 的坐标分别为 $(0，0)$ 和 $(4，0)$，写出点 A，D，E，F，G 的坐标，并指出它们所在的象限.

综合运用



（第 5 题）

5. 如图是象棋棋盘一部分的示意图，建立平面直角坐标系，使棋子“帅”位于点（0，-4），“马”位于点（3，-4），则“兵”位于点________. 如果“马”再走一步，那么“马”的新位置位于点________.（按照象棋规则，棋子“马”只能沿着棋盘上“”或“”的对角线行走）

6. 在平面直角坐标系中描出下列各组点，并将各组内的点用线段依次连接起来.

   (1) (0，4)，(-2，2)，(-1，2)，(-3，0)，(-1，0)，(-4，-2)，(-1，-2)，(-1，-4)，(1，-4)，(1，-2)，(4，-2)，(1，0)，(3，0)，(1，2)，(2，2)，(0，4)；

   (2) (-2，2)，(0，2)，(0，1)，(-1，0)，(-1，-2)，(0，-3)，(4，-3)，(3，-2)，(6，0)，(0，0)，(1，1)，(1，2.5)，(0，3)，(-2，2).

   观察得到的图形，你觉得它们分别像什么？求出所得图形的面积.

7. 建立一个平面直角坐标系，描出点 $A(-2，4)$，$B(3，4)$，画出直线 AB. 若点 C 为直线 AB 上的任意一点，则点 C 的纵坐标是什么？想一想：

   (1) 如果一些点在平行于 x 轴的直线上，那么这些点的纵坐标有什么特点？

   (2) 如果一些点在平行于 y 轴的直线上，那么这些点的横坐标有什么特点？

8. 在平面直角坐标系中选择一些横、纵坐标满足下面条件的点，标出它们的位置，看一看它们在第几象限或在哪条坐标轴上：

   (1) 点 $P(x，y)$ 的坐标满足 $xy>0$；

   (2) 点 $P(x，y)$ 的坐标满足 $xy<0$；

   (3) 点 $P(x，y)$ 的坐标满足 $xy=0$.

拓广探索

9. 已知点 $O(0，0)$，$B(1，2)$，点 A 在坐标轴上，且 $S_{\text{三角形}OAB}=2$，求满足条件的点 A 的坐标.

10. 设计一个能够用它的顶点坐标描绘出来的图形，把这些坐标告诉你的同学，看一看他能否画出你设计的图形.

阅读与思考

用经纬度表示地理位置

怎样表示地理位置呢？通过地球上的经度和纬度，人们可以确定一个地点在地球上的位置.

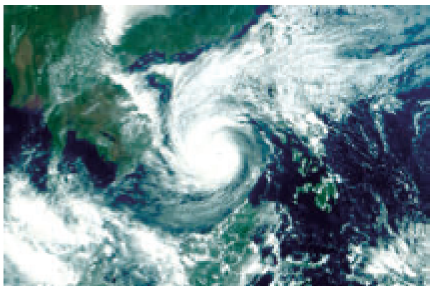
在地球仪和很多地图上，都布满了细线网，这就是经线和纬线. 地球仪上与赤道平行的线是纬线，它们用度（°）来表示地理纬度. 赤道上所有点的纬度是 0°，北极对应北纬 90°，南极对应南纬 90°. 北京位于北纬 39.93°，但仅用纬度这一坐标确定北京的位置还是不够的，还需要第二个坐标——经度.

地球仪上连接南北两极的线是经线，它们也用度（°）来表示地理经度. 经过英国格林尼治（Greenwich）天文台旧址的经线作为经度的起始线，即 0°经线. 它东面的所有点有东经度值（从 0°到 180°），西面的所有点有西经度值. 例如北京位于东经 116.33°.

由于地球可近似地看作一个球体，所以经线和纬线在地球表面构成一个坐标网. 经线沿东西方向分布，纬线沿南北方向分布. 指明一点的经度和纬度，就可以确定这一点在地球上的位置. 例如，“北纬 39.93°，东经 116.33°”确定了北京在地球上的位置.

以下是某台风中心位置的一些信息：

12 月 18 日 14 时，台风中心位于海南省三沙市永暑礁东北方向约 270 km 的海面上，地理坐标为北纬 11.2°，东经 114.8°.



12 月 20 日 5 时，台风中心位于海南省三沙市永兴岛西偏南方向大约 200 km 的海面上，地理坐标为北纬 16.2°，东经 110.6°.

你能从中找出哪几种表示位置的方法？你能借助地球仪，找到这次台风的中心在上述两个时刻的位置吗？

9.2 坐标方法的简单应用

平面直角坐标系建立了平面内的点与它的坐标的一一对应关系，这样就可以利用坐标方法数形结合地研究一些问题.

9.2.1 用坐标表示地理位置

在实际生活中，经常需要准确描述一些地点的位置，这时可以通过建立平面直角坐标系，用坐标来表示地理位置.

探究

根据以下条件画一幅示意图，画出天安门、国家体育场、中国人民抗日战争纪念馆、北京朝阳火车站、首钢滑雪大跳台、颐和园的位置.

国家体育场：在天安门以北约 9 km 处.

中国人民抗日战争纪念馆：在天安门以西约 14.5 km，再往南约 6 km 处.

北京朝阳火车站：在天安门以东约 9.5 km，再往北约 4 km 处.

首钢滑雪大跳台：在天安门以西约 21 km 处.

颐和园：在天安门以西约 11 km，再往北约 10 km 处.

如图 9.2-1，选天安门所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 1 km 长. 依题目所给条件，点（0，0）就是天安门的位置，点（0，9）就是国家体育场的位置，点（−14.5，−6）就是中国人民抗日战争纪念馆的位置.

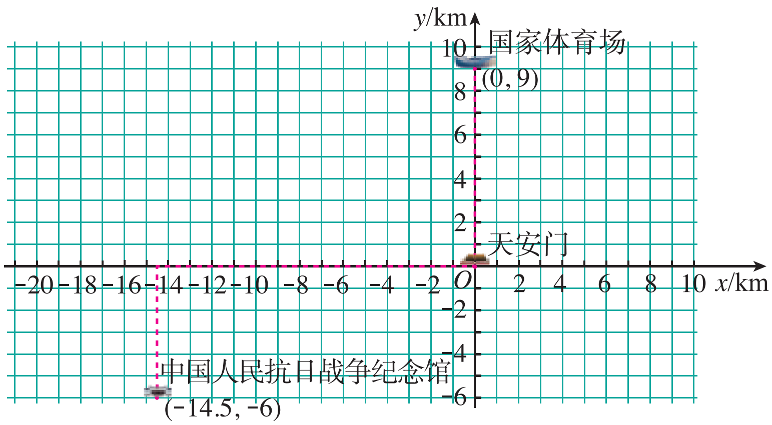


图 9.2-1

类似地，请你在图 9.2-1 上画出北京朝阳火车站、首钢滑雪大跳台、颐和园的位置，并标明它们的坐标.

选取天安门所在位置为原点，并分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，有什么优点？

归纳

利用平面直角坐标系绘制区域内一些地点分布平面图的过程如下：

（1）建立平面直角坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、y 轴的正方向；

（2）根据具体问题，确定单位长度；

（3）在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和各个地点的名称.

我们知道，通过建立平面直角坐标系，可以用坐标表示平面内点的位置. 还有其他方法吗？

思考

如图 9.2-2，一艘船在 A 处遇险后向相距 35 n mile 位于 B 处的救生船报警，如何用方向和距离描述救生船相对于遇险船的位置？救生船接到报警后准备前往救援，如何用方向和距离描述遇险船相对于救生船的位置？

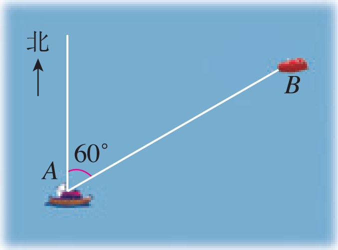


图 9.2-2

由图 9.2-2 可知，救生船在遇险船北偏东 60°的方向上，与遇险船的距离是 35 n mile. 用北偏东 60°，35 n mile 就可以确定救生船相对于遇险船的位置. 反过来，用南偏西 60°，35 n mile 就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

一般地，可以建立平面直角坐标系，用坐标表示平面内的地理位置，还可以用表示方向的角和距离表示平面内物体的位置.

例 1 某海警舰艇编队在巡航时，舰艇观察员观测到一座东西向的海岛，海岛的西端位于舰艇的北偏西 60°，1.38 n mile 处，东端位于舰艇北偏东 45°方向. 请你根据以上信息，估算这座海岛东西向的长度.（1 n mile＝1.852 km）

解： 如图 9.2-3，根据题目信息，画出表示舰艇和海岛相对位置的示意图.

量得 $AB\approx4.0$ cm，$BC\approx5.5$ cm. 由于 AB 的长度代表实际距离1.38 n mile

(约 2.56 km)，可知图 9.2-3 中 1 cm 代表实际距离约 0.64 km，所以海岛东西向的实际长度约为 $0.64\times5.5\approx3.5$ (km).

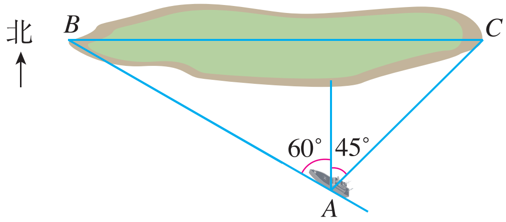
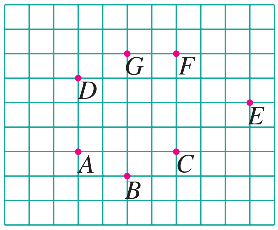


图 9.2-3

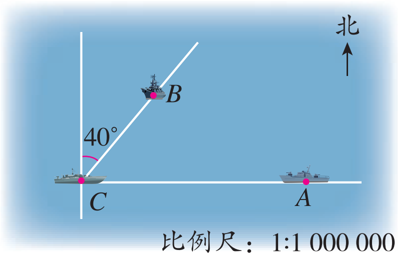
练习

1. 如图，(1) 如果点 B，C 的坐标分别为 $B(-1，-2)$ 和 $C(1，-1)$，写出 A，D，E，F，G 各点的坐标；
   (2) 请你在图中再建立一个平面直角坐标系，并写出各点的坐标.



(第 1 题)

2. 李明家在学校以东 1 000 m，再往北 1 500 m处；张华家在学校以西2 000 m，再往南 500 m 处；王芳家在学校以南 1 500 m处. 建立适当的平面直角坐标系，画出学校和这三位同学家的位置，并用坐标表示出来.
3. 如图是三艘舰艇的位置示意图，试用方向和距离描述 A，B 处的两艘舰艇相对于 C 处舰艇的位置.



(第 3 题)

9.2.2 用坐标表示平移

我们知道，对一个图形进行平移，图形上点的位置会发生变化. 这时如果建立平面直角坐标系，就可以用坐标的变化表示平移了.

探究

如图 9.2-4，将点 $A(-2，-1)$ 向右平移 5 个单位长度，得到点 A_1，在图上标出这个点，并写出它的坐标. 观察坐标的变化，你能发现点 A_1 的坐标与点 A 的坐标之间有什么关系吗？把点 A 向上平移 4 个单位长度呢？

把点 A 向左或向下平移 2 个单位长度呢？

再找几个点，对它们进行平移，观察各组对应点的坐标之间的关系，你能从中发现什么规律？

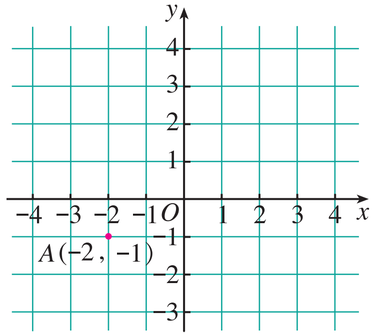


图 9.2-4

一般地，在平面直角坐标系中，将点(x, y)向右(或左)平移 a 个单位长度，可以得到对应点$(x+a, y)$(或$(x-a, y)$)；将点(x, y)向上(或下)平移 b 个单位长度，可以得到对应点$(x, y+b)$(或$(x, y-b)$).

探究

如图 9.2-5，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-2, 4)$，$B(-2, 3)$，$C(-1, 3)$，$D(-1, 4)$，将正方形 $ABCD$ 先向下平移 7 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度，两次平移后四个顶点相应地变为点 E，F，G，H（图 9.2-6），它们的坐标分别是什么？如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和前面得到的正方形位置相同吗？

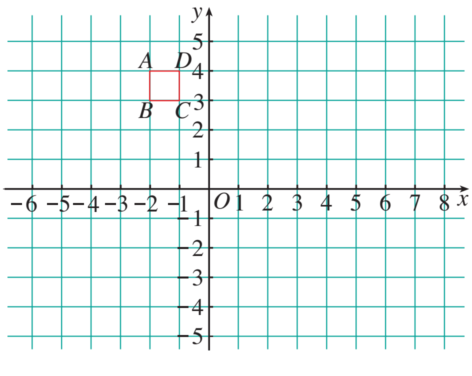


图 9.2-5

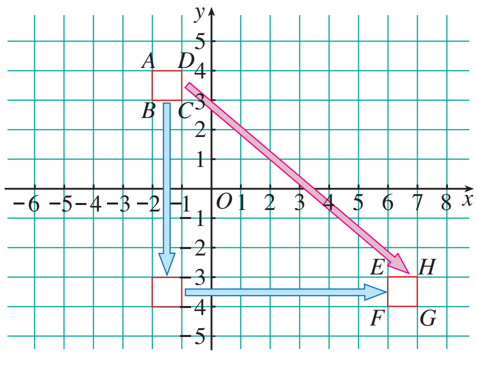


图 9.2-6

可以求出点 E，F，G，H 的坐标分别是 $(6, -3)$，$(6, -4)$，$(7, -4)$，$(7, -3)$. 如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和前面得到的正方形位置相同（图 9.2-6）.

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到.

例 2　(1) 如图 9.2-7，长方形$A'B'C'D'$可以由长方形 $ABCD$ 经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？

(2) 点 $P(-3, 1)$ 是长方形 $ABCD$ 上一点，写出点 P 的对应点 P'的坐标.

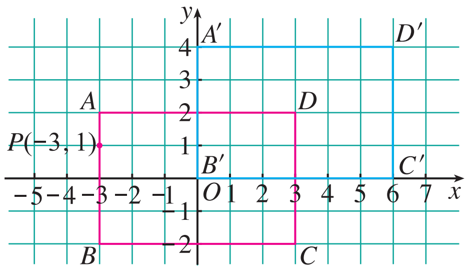


图 9.2-7

解：(1) 将长方形 $ABCD$ 先向右平移 3 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，可以得到长方形 $A'B'C'D'$. 把长方形 $ABCD$ 各个点的横坐标都加 3，纵坐标都加 2，就得到了它们在长方形 $A'B'C'D'$上对应点的坐标.

(2) 由于点 P 是长方形 $ABCD$ 上一点，将点 P 的横坐标加 3，纵坐标加 2，就得到对应点 P'的坐标 $(0, 3)$.

练习

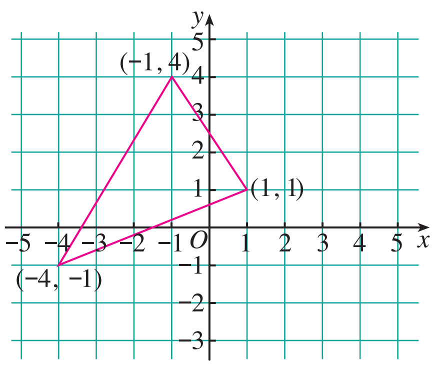
1. 如图，将三角形向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，则平移后三个顶点的坐标分别是（　　）.

   (A) $(2, 2)$，$(3, 4)$，$(1, 7)$

   (B) $(-2, 2)$，$(4, 3)$，$(1, 7)$

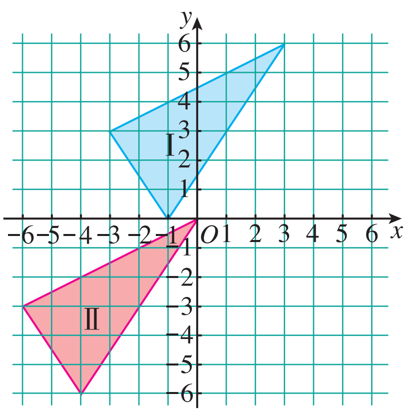
   (C) $(-2, 2)$，$(3, 4)$，$(1, 7)$

   (D) $(2, -2)$，$(3, 3)$，$(1, 7)$

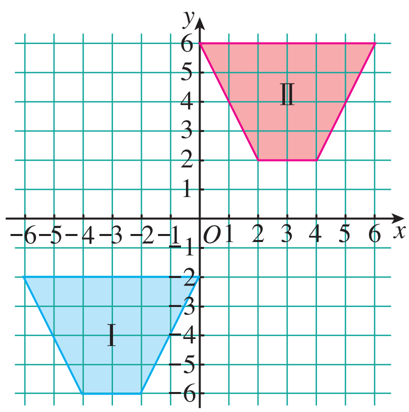


（第 1 题）

2. 如图，图形Ⅱ可以由图形Ⅰ经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？



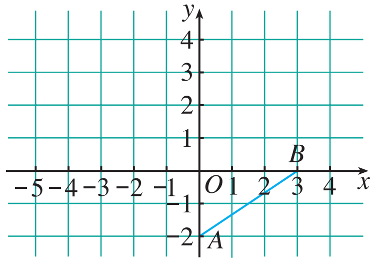
(1)



(2)

（第 2 题）

3. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(0, -2)$，$B(3, 0)$，先将线段 AB 向左平移 2 个单位长度，向上平移 3 个单位长度，得到线段 CD；再将线段 CD 向左平移 3 个单位长度，向下平移 2 个单位长度，得到线段 EF. 画出平移后的线段 CD 和 EF，并写出点 C，D，E，F 的坐标.



（第 3 题）

对一个图形进行平移，这个图形上所有点的坐标都要发生相应的变化；反过来，从图形上的点的坐标的某种变化，也可以看出对这个图形进行了怎样的平移.

探究

如图 9.2-8，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(4, 3)$，$B(3, 1)$，$C(1, 2)$.

(1) 将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标不变，分别得到点 A_1，B_1，C_1，依次连接 A_1，B_1，C_1 各点，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

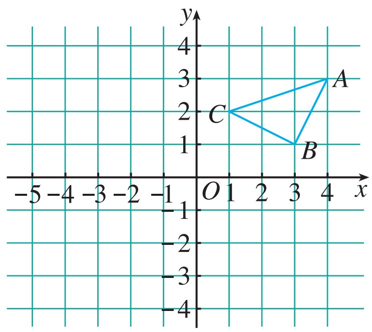


图 9.2-8

(2) 将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都减去 5，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，依次连接 A_2，B_2，C_2 各点，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

如图 9.2-9，容易发现，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向左平移 6 个单位长度得到. 类似地，三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，它可以看作将三角形 ABC 向下平移 5 个单位长度得到.

人民教育出版社

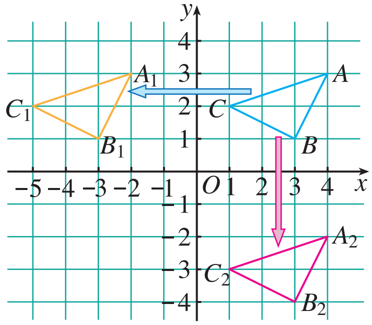


图 9.2-9

将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，同时纵坐标都减去 5，画出得到的图形. 你有什么发现?

一般地，在平面直角坐标系中，如果把一个图形各个点的横坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形可以看作把原图形向右（或左）平移 a 个单位长度得到；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形可以看作把原图形向上（或下）平移 a 个单位长度得到.

例 3 如图 9.2-10，将三角形 ABC 平移，得到三角形 $A_1B_1C_1$，其中任意一点 $P(x_0, y_0)$平移后的对应点为 $P_1(x_0+5, y_0+3)$. 写出三角形 ABC 的一种沿坐标轴方向的平移方式，以及点 A_1，B_1，C_1的坐标.

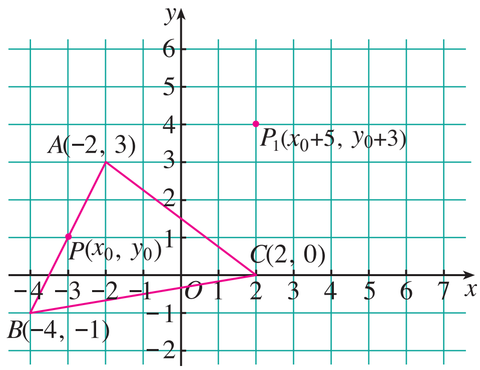
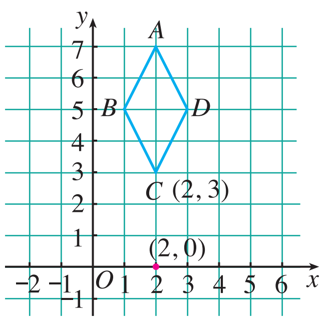


图 9.2-10

解： 由平移前后的对应点 P 和 P_1的坐标关系可知，将三角形 ABC 先向右平移 5 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，可以得到三角形 $A_1B_1C_1$. 同时，还可以得到点 A，B，C 的对应点 A_1，B_1，C_1的坐标分别为(3，6)，(1，2)，(7，3).

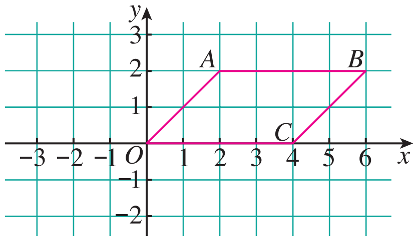
练习

1. 如图，将四边形 $ABCD$ 平移后，顶点 C(2，3) 的坐标变成了（2，0），这时点 A(2，7)，B(1，5)，D(3，5) 的坐标分别变成了什么? 画出四边形 $ABCD$ 平移后得到的图形.



（第 1 题）

2. 如图，平行四边形 $AOCB$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2,\ 2)$，$O(0,\ 0)$，$C(4,\ 0)$，$B(6,\ 2)$. 将这四个顶点的横坐标都减去 3，同时纵坐标都加 1，分别得到点 A'，O'，C'，B'. 请在图中画出四边形 $A'O'C'B'$，它与平行四边形 $AOCB$ 有什么关系？



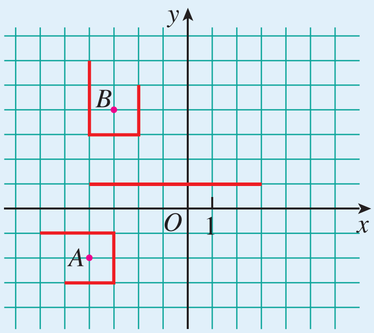
（第 2 题）

3. 三角形 ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(-3,\ 2)$，$B(1,\ 1)$，$C(-1,\ -2)$. 若将三角形 ABC 平移，使点 A 平移到点 $(1,\ -2)$ 处，写出三角形 ABC 沿坐标轴方向平移的一种方式，以及点 B 和点 C 的对应点的坐标.

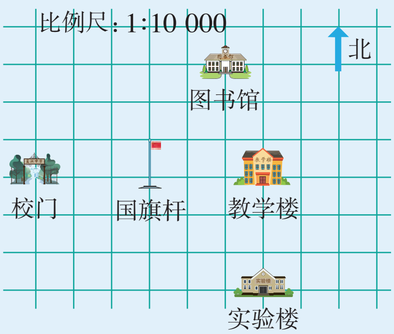
习题 9.2

复习巩固

1. 如图，机械手要将一个工件从图中 A 处移动到 B 处，但是这个工件不能碰到图中的红色障碍，试用坐标写出一条机械手在移动中可能要走过的路线.



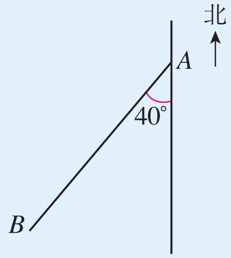
（第 1 题）



（第 2 题）

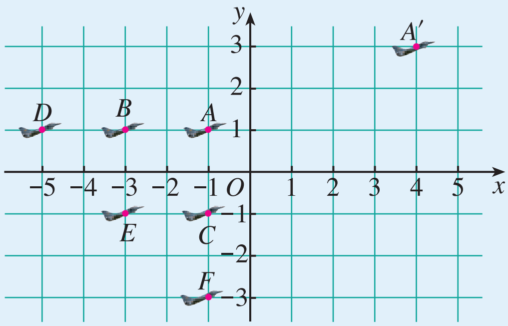
2. 如图，这是一所学校的平面示意图，建立适当的平面直角坐标系，并用坐标表示教学楼、图书馆、校门、实验楼、国旗杆的位置. 类似地，你能用坐标表示你自己学校各主要建筑物的位置吗？

3. 如图，在一次活动中，位于 A 处的 1 班准备前往相距 5 km 的 B 处与位于 B 处的 2 班会合，如何用方向和距离描述 2 班相对于 1 班的位置？反过来，如何用方向和距离描述 1 班相对于 2 班的位置？

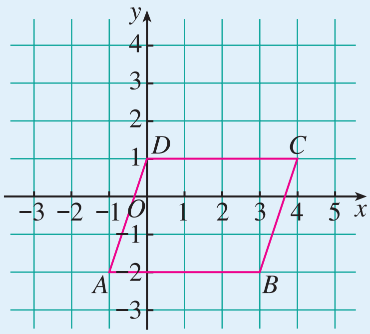


（第 3 题）

4. 如图，在一次飞行表演中，6 架飞机 A，B，C，D，E，F 编队飞行，且保持队形不变，分别写出它们的坐标. 当飞机 A 飞行到 A' 位置时，飞机 B，C，D，E，F 飞到了什么位置？用坐标表示这 6 架飞机的新位置.



（第 4 题）

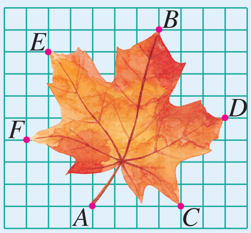


（第 5 题）

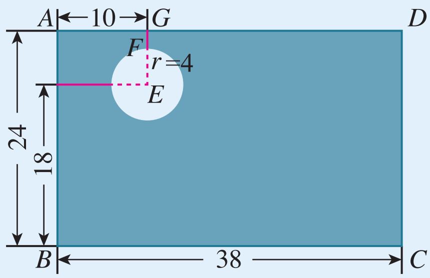
5. 如图，将平行四边形 $ABCD$ 向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，得到平行四边形 $A'B'C'D'$. 画出平移后的图形，并指出各个顶点的坐标.

综合运用

6. 如图，建立平面直角坐标系标注一片叶子标本，若表示叶柄“底部”的点 A 的坐标为（-1，-2），表示叶片“顶部”的点 B 的坐标为（2，6），请你写出图中点 C，D，E，F 的坐标.



（第 6 题）

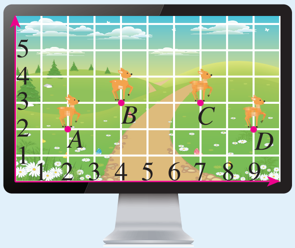


（第 7 题）

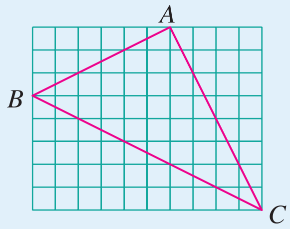
7. 一长方形零件的尺寸（单位：mm）如图所示，建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示点 A，B，C，D，E，F，G 的位置.

人民教育出版社

8. 在制作动画片时，经常要用到图形的平移. 如图，小鹿从点 A 到 B，再到 C，到 D，这几个过程中，分别进行了怎样的平移?



（第 8 题）



（第 9 题）

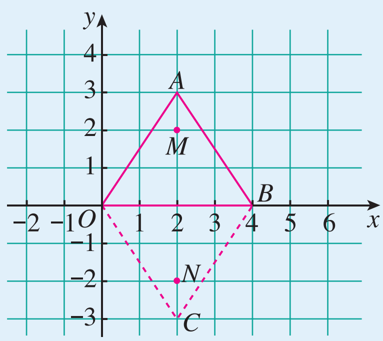
9. 如图，在平面直角坐标系中，三角形 ABC 的顶点 A，B 的坐标分别为 $A(3, 6)$，$B(-3, 3)$. 把三角形 ABC 平移得到三角形 CDE，使点 A 平移到点 C 处，那么点 C 平移后的对应点 E 的坐标是什么?

拓广探索

10. 如图，这是一个利用平面直角坐标系画出的某动物园的示意图的一部分. 如果这个平面直角坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，并且猴山和狮虎山的坐标分别是（2，1）和（8，2），你能在此图上标出熊猫馆（6，6）的位置吗?

11. 如图，三角形 COB 是由三角形 AOB 经过某种变换后得到的图形，观察点 A 与对应点 C 的坐标之间的关系. 三角形 AOB 内任意一点 M 的坐标为（x，y），点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么?

（第 10 题）



（第 11 题）

数学活动

活动1　用坐标描述公园景点位置

春天到了，七年级（2）班组织同学到人民公园春游，李明、张华对着景区示意图（图1），描述牡丹园的位置（图中小正方形的边长代表100 m长）如下.

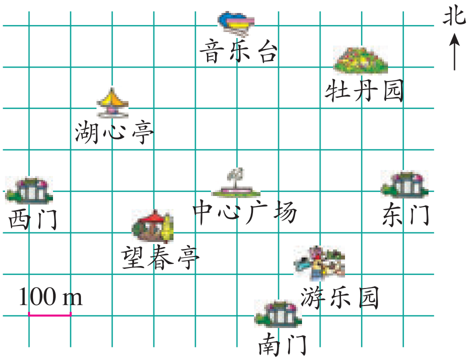


图1

李明："牡丹园的坐标是（3，3）."

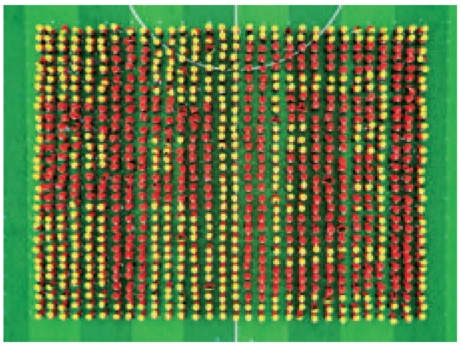
张华："牡丹园在中心广场东北方向约420 m处."

实际上，他们所说的位置都是正确的. 你知道李明同学是如何在景区示意图上建立平面直角坐标系的吗？你理解张华同学所说的"东北方向约420 m处"的含义吗？

用他们的方法，你能描述公园内其他景点的位置吗？与同学交流一下.

活动2　方阵表演设计

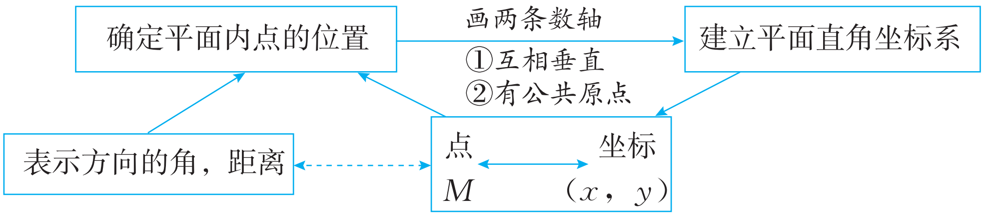
"方阵表演"是运动会上非常受欢迎的项目. 各方阵借助色彩丰富、意义独特的拼板、服装、道具等，通过队形变化展示各自的特色风貌.



请以小组为单位，为你们班的方阵表演设计一组动作，并写出表演设计方案，与其他小组交流. 设计方案中要建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示方阵队员的位置.

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过具体实例学习了平面直角坐标系等知识，学习了应用坐标描述一些简单图形，并应用坐标方法解决了一些简单问题.

建立平面直角坐标系后，对于坐标平面内任意一点 M，都有唯一的一个有序实数对 (x, y) 与它对应；反过来，对于任意一个有序实数对 (x, y)，在坐标平面内都有唯一的点 M 与它对应. 这样，就建立了平面内的点与它的坐标的一一对应关系，从而可以数形结合地研究问题.

坐标方法有广泛的应用. 例如，我们可以利用坐标描述一些地点的分布情况；还可以通过平面直角坐标系中对应点的坐标之间的关系，研究图形的平移等问题. 这种用数和运算来研究几何问题的方法是非常重要的，可以培养我们的空间观念和几何直观，今后我们将不断地看到它的应用.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 结合具体实例，谈谈如何建立平面直角坐标系. 在平面直角坐标系中描出原点以及其他一些点的位置，并分别指出它们的横坐标、纵坐标及所在的象限.

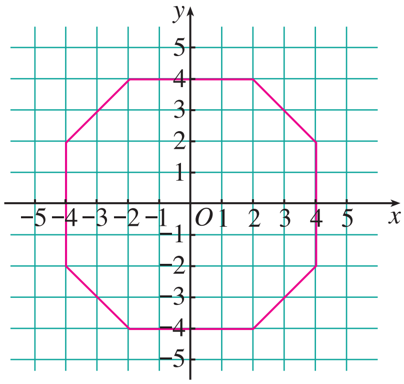
2. 当要用坐标描述一个简单几何图形时，你是如何建立平面直角坐标系的？结合长方形谈谈你的做法.

3. 你能结合具体实例，说一说怎样用坐标描述一个区域内的地点分布情况吗？你又是怎样用方向和距离表示两个地点或物体的相对位置的？请结合实例说明.

4. 你能结合具体实例，说一说怎样借助坐标表示图形的平移吗？

复习题 9

复习巩固



（第 2 题）

1. 在平面直角坐标系中描出下列各点，并指出各点的横坐标和纵坐标及各点所在的象限.

   $A(2,\ 3)$，$B(-2,\ 3)$，$C(-2,\ -3)$，$D(2,\ -3)$.

2. 如图，写出八边形各顶点的坐标.

3. 在同一平面直角坐标系中描出下列各组点，并将各组内的点用线段依次连接起来.

   (1) $(-2,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 5)$，$(-2,\ 2)$，$(-2,\ 0)$；

   (2) $(-5,\ 0)$，$(-2,\ -2)$，$(0,\ -2)$，$(0,\ 0)$，$(-5,\ 0)$；

   (3) $(2,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ -5)$，$(2,\ -2)$，$(2,\ 0)$；

   (4) $(5,\ 0)$，$(2,\ 2)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(5,\ 0)$.

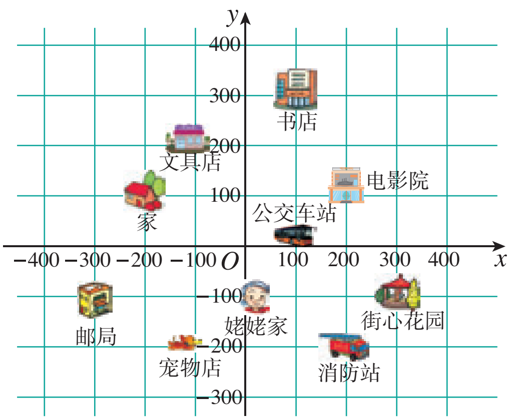
   观察所得的图形，你觉得它像什么？

4. 图中标明了李明家附近的一些地方，这些地方都在网格线的交点处.

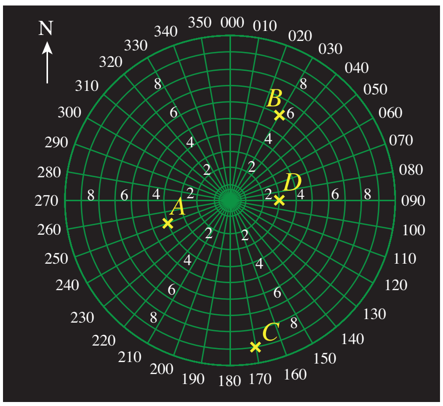
   (1) 写出书店和邮局的坐标；

   (2) 一个星期日早晨，李明从家出发，先后去了下列地点：$(-100,\ 200)$，$(100,\ 0)$，$(200,\ 100)$，$(200,\ -200)$，$(-100,\ -200)$，$(0,\ -100)$，最后回到家里，依次写出他路上经过的地方；

   (3) 用线段依次连接他在 (2) 中经过的地点，你能得到什么图形？



（第 4 题）



（第 5 题）

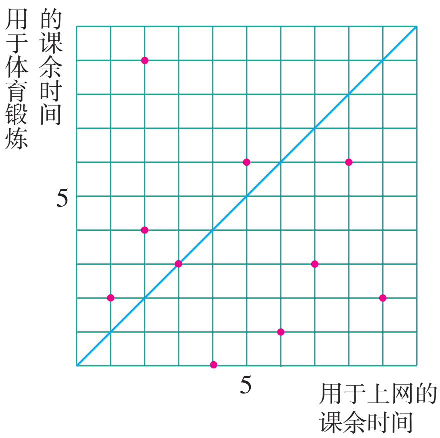
5. 如图，一艘船在雾中航行，某时刻雷达屏幕上出现了 A，B，C，D 四个目标. 由雷达显示可知，目标 A 在这艘船的南偏西 70°，4 n mile 处. 写出其他三个目标相对这艘船的方向和距离.（图中中央位置为这艘船的位置）

6. 平行四边形 $ABCO$ 四个顶点的坐标分别是 $A(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$B(3\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$C(2\sqrt{3},\ 0)$，$O(0,\ 0)$. 将这个平行四边形向左平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度，得到平行四边形 $A'B'C'O'$. 求平行四边形 $A'B'C'O'$ 四个顶点的坐标.

综合运用

7. （1）坐标（x，3）中的 x 分别取 −3，−2，−1，0，1，2，3 时所表示的点是否在一条直线上？如果这些点在一条直线上，这条直线与 x 轴有什么关系？
   （2）坐标（3，y）中的 y 分别取 −3，−2，−1，0，1，2，3 时所表示的点是否在一条直线上？如果这些点在一条直线上，这条直线与 x 轴有什么关系？

8. 图中显示了 10 名学生平均每星期用于体育锻炼的课余时间和用于上网的课余时间（单位：h）.
   （1）建立平面直角坐标系表示图中各点.
   （2）图中有一个点位于方格纸的对角线上，这表示什么意思？
   （3）图中方格纸的对角线的左上方的点有什么共同的特点？它右下方的点呢？
   （4）估计一下你每星期用于体育锻炼的课余时间和用于上网的课余时间，在图上描出对应的点，这个点位于什么位置？



（第 8 题）

9. 树人中学的学生计划参观革命圣地延安，如图是校学生会绘制的宝塔山等地点的分布图（图上标注的是各地点的位置，小正方形的边长代表实际约 350 m 长）.

请你在图上建立平面直角坐标系，表示各地点的位置.

（第 9 题）

10. 兴康社区附近有五个快递中转站：第一个在居委会，第二个在居委会北偏东 30°方向 2 000 m 处，第三个在居委会正西方向 4 500 m 处，第四个在居委会东南方向 3 000 m 处，第五个在居委会正南方向 2 500 m 处. 请你绘制一张平面图，表示这五个快递中转站的位置.

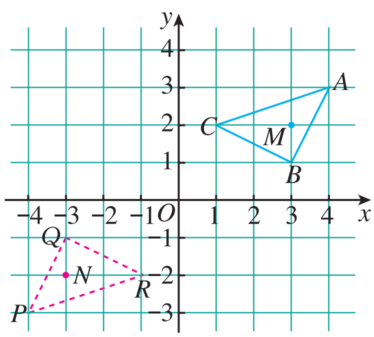
拓广探索

11. 建立平面直角坐标系，并描出下列各点：

$A(1，1)$，$B(5，1)$，$C(3，3)$，$D(-3，3)$，$E(1，-2)$，$F(1，4)$，$G(3，2)$，$H(3，-2)$，$I(-1，-1)$，$J(-1，1)$.

连接 AB，CD，EF，GH，IJ，分别找出它们的中点，将这些中点的横坐标和纵坐标分别与对应线段的两个端点的横坐标和纵坐标进行比较，你发现它们之间有什么关系？写出你的发现，并与同学进行交流.

12. 如图，三角形 PQR 是三角形 ABC 经过某种变换后得到的图形，点 A，B，C 经过这种变换后分别得到点 P，Q，R，观察对应点的坐标之间的关系. 三角形 ABC 内任意一点 M 的坐标为（x，y），点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么？



（第 12 题）

第十章　二元一次方程组

在解决一些问题时，经常会遇到求两个未知数的情形．看下面的问题．

新疆是我国棉花的主要产地之一．近年来，机械化采棉已经成为新疆棉采摘的主要方式．某种棉大户租用 6 台大、小两种型号的采棉机，1 h 就完成了 8 hm^2 棉田的采摘．如果大型采棉机 1 h 完成 2 hm^2 棉田的采摘，小型采棉机 1 h 完成 1 hm^2 棉田的采摘，那么这个种棉大户租用了大、小型采棉机各多少台？

在这个问题中，要求的是两个未知数．如果用一元一次方程来解决，列方程时，要用一个未知数表示另一个未知数．能不能根据题意直接设两个未知数，使列方程变得容易呢？我们从这个想法出发开始本章的学习．

在本章中，我们将从实际问题出发，认识二元一次方程组，学习解二元一次方程组的方法，并运用二元一次方程组解决一些实际问题．在此基础上，学习三元一次方程组及其解法．通过本章的学习，你将对方程（组）有新的认识．

人民教育出版社

10.1 二元一次方程组的概念

我们来看本章引言中的问题.

思考

列方程要先找到相等关系. 本章引言中的问题包含了哪些必须同时满足的相等关系？若设这个种棉大户租用了 x 台大型采棉机，y 台小型采棉机，你能用方程把这些相等关系表示出来吗？

容易发现，问题包含两个必须同时满足的相等关系：

大型采棉机台数＋小型采棉机台数＝总台数，

大型采棉机 1 h 采摘面积＋小型采棉机 1 h 采摘面积＝1 h 采摘总面积.

这两个相等关系可以分别用方程 $x+y=6$ 和 $2x+y=8$ 表示.

观察

上面的两个方程有什么特点？它们与一元一次方程有什么不同？

可以看出，在上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数（x 和 y），且含有未知数的式子都是整式，含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫作**二元一次方程**（linear equation with two unknowns）.

上面的问题中包含两个必须同时满足的相等关系，也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$x+y=6 \qquad ①$$

和

$$2x+y=8. \qquad ②$$

把这两个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=6, \\ 2x+y=8, \end{cases}$$

就组成了一个方程组. 这个方程组中含有两个未知数，且含有未知数的式子都是整式，含有未知数的项的次数都是 1，一共有两个方程，像这样的方程组叫作**二元一次方程组**（system of linear equations with two unknowns）.

探究

满足方程①，且符合问题的实际意义的 x，y 的值有哪些？把它们填入表中.

x					
y					

上表中哪对 x，y 的值还满足方程②？

显然，$x=1$，$y=5$；$x=2$，$y=4$；…；$x=5$，$y=1$ 满足方程①，也就是使方程 $x+y=6$ 两边的值相等，它们都是方程 $x+y=6$ 的解. 如果不考虑方程 $x+y=6$ 与上面实际问题的联系，那么 $x=-1$，$y=7$；$x=0.1$，$y=5.9$；…也都是这个方程的解.

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫作**二元一次方程的解**.

我们还发现，$x=2$，$y=4$ 既满足方程①，又满足方程②. 也就是说，$x=2$，$y=4$ 是方程①与方程②的公共解. 我们把 $x=2$，$y=4$ 叫作二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=6,\\2x+y=8\end{cases}$ 的解，这个解通常记作 $\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}$

联系前面的问题可知，这个种棉大户租用了 2 台大型采棉机，4 台小型采棉机.

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫作**二元一次方程组的解**.

练习

对下面的问题，列出二元一次方程组，并根据问题的实际意义，找出问题的解.

1. 某村乡村振兴项目计划把 28 t 黄桃加工成罐头，刚开始每天加工 2 t，后在技术顾问的指导下改进加工方法，每天加工 4 t，前后共用 8 天完成全部加工任务. 这个项目改进加工方法前、后各用了多少天？
2. 在篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在 10 场比赛中得到 16 分，这个队的胜、负场数分别是多少？

习题 10.1

复习巩固

1. 填表，使上下每对 x，y 的值是方程 $3x+y=5$ 的解.

x	-2	0	0.4	$\frac{5}{3}$				
y					-1	-2	-2.5	-3

2. 方程组 $\begin{cases} x+6y=4, \\ 3x-y=2.5 \end{cases}$ 的解是（　　）.

(A) $\begin{cases} x=2, \\ y=-0.25 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} x=-5.5, \\ y=4 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x=1, \\ y=0.5 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-0.5 \end{cases}$

综合运用

3. 如果三角形的三个内角分别是 $x°$，$y°$，$y°$，求：
   (1) x，y 满足的关系式；
   (2) 当 $x=90$ 时，y 的值；
   (3) 当 $y=60$ 时，x 的值.

4. 我国古代数学著作《孙子算经》（成书于公元 400 年前后）中有“鸡兔同笼”问题：今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足．问鸡兔各几何．你能用二元一次方程组表示问题中的数量关系吗？试找出问题的解.

拓广探索

5. 把一根长 7 m 的钢管截成 2 m 长和 1 m 长两种规格的钢管，为了不造成浪费，应截成 2 m 长和 1 m 长的钢管各多少根？你能用二元一次方程来解决这个问题吗？

人民教育出版社

10.2 消元——解二元一次方程组

在上一节中，我们根据本章引言中的问题列出了方程组，并结合未知数的实际意义，通过逐一尝试的方法，找出了方程组的解. 本节我们继续研究怎样解二元一次方程组.

10.2.1 代入消元法

在上一节中，我们已经看到，直接设两个未知数：租用了 x 台大型采棉机，y 台小型采棉机，可以列方程组

$$\begin{cases} x+y=6, \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

表示本章引言中问题包含的相等关系. 如果只设一个未知数：租用了 x 台大型采棉机，那么这个问题也可以用一元一次方程

$$2x+(6-x)=8$$

来解决.

思考

对于本章引言中的问题，采用不同的设未知数的方法，由问题中的相等关系，可以分别列出二元一次方程组和一元一次方程. 你能由所列出的二元一次方程组得到所列的一元一次方程吗？

我们发现，二元一次方程组中第一个方程 $x+y=6$ 可以写为 $y=6-x$. 由于两个方程中的 y 都表示租用小型采棉机的台数，所以可以通过等量代换，把第二个方程 $2x+y=8$ 中的 y 换为 $6-x$，这个方程就化为一元一次方程 $2x+(6-x)=8$. 解这个一元一次方程，得 $x=2$. 把 $x=2$ 代入 $y=6-x$，得 $y=4$，从而得到这个方程组的解.

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就可以把二元一次方程组转化为我们熟悉的一元一次方程. 我们可以先求出一个未知数，然后再求另一个未知数. 这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫作**消元**思想.

上面的解法，是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解. 这种解二元一次方程组的方法叫作**代入消元法**，简称**代入法**.

例 1 用代入法解方程组

$$\begin{cases} x-y=3, & ① \\ 3x-8y=14. & ② \end{cases}$$

分析： 方程①中 x 的系数是 1，用含 y 的式子表示 x，再代入方程②，比较简便.

解： 由①，得

$$x=y+3. \qquad ③$$

把③代入②，得

$$3(y+3)-8y=14.$$

解这个方程，得

$$y=-1.$$

把 $y=-1$ 代入③，得

$$x=2.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

把③代入①可以吗？试试看.

把 $y=-1$ 代入①或②可以吗？

例 2 用代入法解方程组

$$\begin{cases} 3x-5y=3, & ① \\ 2x-y=16. & ② \end{cases}$$

分析： 方程②中 y 的系数是 -1，用含 x 的式子表示 y，再代入方程①，比较简便.

解： 由②，得

$$y=2x-16. \qquad ③$$

把③代入①，得

$$3x-5(2x-16)=3.$$

解这个方程，得

$$x=11.$$

把 $x=11$ 代入③，得

$$y=6.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=11,\\y=6.\end{cases}$$

练习

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

（1）$3x+y-1=0$；　　（2）$2x-y=3$.

2. 用代入法解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x-y=5,\\3x+4y=2;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}3x-2y=5,\\2x+y=8;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}4a-3b=5,\\2a+b=5;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}s-3t=-2,\\s+5t=6.\end{cases}$

上面要解的二元一次方程组的两个方程中有一个未知数的系数为 1 或 -1，下面再来看另外一些例子.

例 3　用代入法解方程组

$$\begin{cases}2x-5y=-11, & ①\\9x+7y=39. & ②\end{cases}$$

分析：方程①中 x 的系数的绝对值较小，可以考虑在方程①中用含 y 的式子表示 x，再代入方程②.

解：由①，得

$$x=\frac{5}{2}y-\frac{11}{2}. \qquad ③$$

把③代入②，得

$$9\left(\frac{5}{2}y-\frac{11}{2}\right)+7y=39.$$

解这个方程，得

$$y=3.$$

解这个方程组时，可以先消去 y 吗？试试看.

把 $y=3$ 代入③，得

$$x=2.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$$

例 4 快递员把货物送到客户手中称为送件，帮客户寄出货物称为揽件. 某快递员星期一的送件数和揽件数分别为 120 件和 45 件，报酬为 270 元；他星期二的送件数和揽件数分别为 90 件和 25 件，报酬为 185 元. 如果这名快递员每送一件和每揽一件货物的报酬分别相同，他每送一件和每揽一件的报酬各是多少元?

分析：由题意可知，

送 120 件的报酬＋揽 45 件的报酬＝270，

送 90 件的报酬＋揽 25 件的报酬＝185.

由此可以列出方程组，通过解方程组解决问题.

解：设这名快递员每送一件的报酬是 x 元，每揽一件的报酬是 y 元.

根据这名快递员星期一和星期二取得的报酬满足的相等关系，列得方程组

$$\begin{cases}120x+45y=270, & ①\\ 90x+25y=185. & ②\end{cases}$$

由①，得

$$x=\frac{9}{4}-\frac{3}{8}y. \qquad ③$$

把③代入②，得

$$90\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{8}y\right)+25y=185.$$

解这个方程，得

$$y=2.$$

把 $y=2$ 代入③，得

$$x=1.5.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=1.5,\\ y=2.\end{cases}$$

答：这名快递员每送一件的报酬是 1.5 元，每揽一件的报酬是 2 元.

人民教育出版社

练习

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-3y=-2, \\ 5x+4y=13; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3m+2n=17, \\ 2m-3n+6=0. \end{cases}$

2. 一种商品分装在大、小两种包装盒内，3 大盒、4 小盒共装 108 瓶，2 大盒、3 小盒共装 76 瓶. 大、小包装盒每盒各装多少瓶?

10.2.2 加减消元法

思考

前面我们用代入法求出了方程组

$$\begin{cases} x+y=6, & ① \\ 2x+y=8 & ② \end{cases}$$

的解. 这个方程组的两个方程中，y 的系数有什么关系? 利用这种关系，你能发现新的消元方法吗?

这两个方程中未知数 y 的系数相等，②－①可以消去未知数 y，得

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$y=4.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$$

②－①就是用方程②的左边减去方程①的左边，方程②的右边减去方程①的右边.

思考

联系上面的解法，想一想怎样解方程组 $\begin{cases} 3x+10y=2.8, \\ 15x-10y=8. \end{cases}$

从上面两个方程组的解法可以看出，当二元一次方程组的两个方程中某个未知数的系数互为相反数或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程，进而求得二元一次方程组的解.

人民教育出版社

这种解二元一次方程组的方法叫作**加减消元法**，简称**加减法**.

例 5 用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x+\dfrac{y}{2}=0, & ① \\ 2x-\dfrac{y}{2}=15. & ②\end{cases}$$

解： ①+②，得

$$5x=15,$$

$$x=3.$$

把 $x=3$ 代入①，得

$$3\times3+\frac{y}{2}=0,$$

$$y=-18.$$

把 $x=3$ 代入②，可以解得 y 吗？

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=3,\\ y=-18.\end{cases}$$

练习

用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=9,\\ 3x-2y=-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2a-3b=-9,\\ 7a-3b=6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}5x+2y=27,\\ 5x-4y=21;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-5y=13,\\ x+5y=-41.\end{cases}$

当二元一次方程组的两个方程中同一个未知数的系数既不相等也不互为相反数时，能用加减法解方程组吗？看下面的例子.

例 6 用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x-2y=4, & ① \\ 7x+4y=18. & ②\end{cases}$$

人民教育出版社

分析： 这两个方程中同一个未知数的系数既不相等也不互为相反数，直接把这两个方程进行加减不能消元．观察这两个方程中未知数 y 的系数之间的关系，将①×2 可以使两个方程中 y 的系数互为相反数，就可以用加减法求解了．

解： ①×2，得

$$6x-4y=8. \quad ③$$

②+③，得

$$13x=26,$$

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$3\times2-2y=4,$$

$$y=1.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$$

例 7 我国古代数学著作《九章算术》中记载了这样一道题：

今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两．问牛、羊各直金几何？

意思是：假设 5 头牛、2 只羊，共值金 10 两；2 头牛、5 只羊，共值金 8 两．那么每头牛、每只羊分别值金多少两？你能解答这个问题吗？

分析： 由于每头牛和每只羊的价格分别相等，所以根据“5 头牛、2 只羊，共值金 10 两；2 头牛、5 只羊，共值金 8 两”可列得方程组．

解： 设每头牛和每只羊分别值金 x 两和 y 两．

根据问题中的相等关系，列得方程组

$$\begin{cases}5x+2y=10, & ①\\2x+5y=8. & ②\end{cases}$$

①×2，得

$$10x+4y=20. \quad ③$$

②×5，得

$$10x+25y=40. \quad ④$$

④−③，得

$$21y=20,$$

> 利用等式的性质对方程适当变形，使得两个方程中某个未知数的系数互为相反数或相等，就可以用加减法求解了．

$$y=\frac{20}{21}.$$

把 $y=\frac{20}{21}$ 代入①，得

$$x=\frac{34}{21}.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=\dfrac{34}{21},\\[2mm] y=\dfrac{20}{21}.\end{cases}$$

答：每头牛和每只羊分别值金 $\frac{34}{21}$ 两和 $\frac{20}{21}$ 两.

如果用加减法消去 y，应该怎样解？解得的结果一样吗？

解方程组的基本思想是消元．代入消元法和加减消元法是二元一次方程组的两种解法，它们都是通过消元使方程组转化为一元一次方程，只是消元的方法不同．应根据方程组的具体情况，选择适合它的解法．

思考

（1）怎样解下面的方程组？

$$\begin{cases}2x+y=1.5,\\ 0.8x+0.6y=1.3;\end{cases}\qquad \begin{cases}x+2y=3,\\ 3x-2y=5.\end{cases}$$

（2）选择你认为简便的方法解习题 10.1 的第 4 题（“鸡兔同笼”问题）.

练习

1．用加减法解下列方程组：

（1）$\begin{cases}3x+4y=16,\\ 5x-6y=33;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}2x+3y=-\dfrac{20}{9},\\[2mm] 3x+2y=-\dfrac{5}{3}.\end{cases}$

2．周末，王芳到菜市场帮妈妈买鲈鱼和茄子．已知鲈鱼每千克 35 元，茄子每千克 6 元，王芳买的茄子比鲈鱼多 0.5 kg，共花费 44 元．她买了鲈鱼和茄子各多少千克？

习题 10.2

复习巩固

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $\frac{3}{2}x+2y=1$；　　(2) $\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}y=2$；

(3) $5x-3y=x+2y$；　　(4) $2(3y-3)=6x+4$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=9; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3s-t=5, \\ 5s+2t=15; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+3y=-5, \\ 3x-4y=18; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{2}=6, \\ 3(x+y)-2(x-y)=28. \end{cases}$

3. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3u+2t=7, \\ 6u-2t=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2a+b=3, \\ 3a+b=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-5y=7, \\ 4x-3y=7; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y=-3, \\ 5x+y=2. \end{cases}$

4. 某旅行社组织 200 人到花果岭和云水洞旅游. 经统计，到花果岭旅游的人数比到云水洞的人数的 2 倍少 1. 到这两地旅游的人数各是多少？

5. 一条船顺流航行，每小时行驶 20 km；逆流航行，每小时行驶 16 km. 船在静水中的速度与水流速度分别是多少？

6. 七年级（1）班的同学去参加科技体验活动，第一组有 2 人选择“九天揽月”活动，3 人选择“深海探幽”活动，共花费 130 元；第二组有 4 人选择“九天揽月”活动，2 人选择“深海探幽”活动，共花费 140 元. 每张“九天揽月”和“深海探幽”活动的票价各为多少元？

综合运用

7. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3(x-1)=y+5, \\ 3(x+5)=5(y-1); \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \frac{2u}{3}+\frac{3v}{4}=\frac{1}{2}, \\ \frac{4u}{5}+\frac{5v}{6}=\frac{7}{15}. \end{cases}$

人民教育出版社

8. 《孙子算经》中有这样一道题：今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸，屈绳量之，不足一尺，问几何. 意思是：用一根绳子去量一根木头，绳子剩余 4.5 尺，将绳子对折再量木头，木头剩余 1 尺，问木头长多少尺. 请你解决这个问题.

9. 某市出租车起步价所包含的行驶里程不超过 3 km，超过 3 km 的部分按一定标准另外收取里程费. 张华乘坐出租车出行，她第一次乘车行驶的路程为 7 km，起步价和里程费共计 17.2 元；第二次乘车行驶的路程为 13 km，起步价和里程费共计 28 元. 你能由此计算出出租车的起步价和超过 3 km 后的里程费收费标准吗？

10. 为举办“我和我的祖国”文艺会演，学校为七年级（1）班表演诗朗诵的5 名男生和 3 名女生租用演出服的总费用是 190 元；为七年级（2）班表演小合唱的 11 名男生和 12 名女生租用演出服的总费用是 580 元. 如果每套男、女生演出服的租用费分别相同，每套男、女生演出服的租用费各是多少钱？

11. 2 台大型收割机和 5 台小型收割机同时工作 2 h 共收割小麦 3.6 hm^2，3 台大型收割机和 2 台小型收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm^2. 1 台大型收割机和 1 台小型收割机每小时各收割小麦多少公顷？

拓广探索

12. 我国明代数学家程大位（1533—1606）所著《算法统宗》中记载了“二果问价”问题：

九百九十九文钱，甜果苦果买一千.
甜果九个十一文，苦果七个四文钱.
试问甜苦果几个，又问各该几个钱.

意思是：九百九十九文钱买了甜果和苦果共一千个，已知十一文钱可以买九个甜果，四文钱可以买七个苦果，那么甜果、苦果各买了多少个？每个甜果、苦果分别卖多少文钱？请你解决这个问题.

人民教育出版社

10.3　实际问题与二元一次方程组

前面我们讨论了二元一次方程组的解法，并用二元一次方程组解决了一些简单的实际问题. 本节我们继续探究如何用二元一次方程组解决实际问题.

探究 1

养牛场原有 30 头大牛和 15 头小牛，1 天约用饲料 675 kg；一周后又购进 12 头大牛和 5 头小牛，这时 1 天约用饲料 940 kg. 饲养员李大叔估计每头大牛 1 天需饲料 18～20 kg，每头小牛 1 天需饲料 7～8 kg. 你能通过计算检验他的估计吗？

分析：设每头大牛和每头小牛 1 天各约用饲料 x kg 和 y kg.

根据两种情况的饲料用量，找出相等关系，列得方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\quad}, \\ y=\underline{\qquad\quad}. \end{cases}$$

这就是说，每头大牛 1 天约需饲料______ kg，每头小牛 1 天约需饲料______ kg. 因此，饲养员李大叔对大牛食量的估计________，对小牛食量的估计________.

> 可以先独立分析问题中的数量关系，列出方程组，得出问题的解答，再与同学交流.

练习

1. 为了节能减排，一家工厂将照明灯换成了节能灯. A 车间购买了 3 盏甲型节能灯和 5 盏乙型节能灯，共花费 50 元；B 车间购买了 12 盏甲型节能灯和 4 盏乙型节能灯，共花费 88 元. 1 盏甲型节能灯和 1 盏乙型节能灯的售价各是多少元？

2. 学校图书馆分两次购买了相同版本的《西游记》和《水浒传》供学生借阅. 第一次买了 2 套《西游记》和 3 套《水浒传》，共花费 151 元；第二次买了 4 套《西游记》和 2 套《水浒传》，共花费 178 元. 每套《西游记》和《水浒传》的价格分别是多少元?

3. 某公司前两年产生的餐厨垃圾、建筑垃圾的质量都基本没变，但支付的餐厨垃圾处理费和建筑垃圾清运费的总和由 7 020 元上升为 8 520 元，原因是餐厨垃圾处理费的收费标准由 240 元/t 上调为 300 元/t，建筑垃圾清运费的收费标准由 150 元/t 上调为 180 元/t. 这家公司去年的餐厨垃圾和建筑垃圾各有多少吨?

探究 2

据统计资料，甲、乙两种作物的单位面积产量的比是 1∶2. 现要把一块长 200 m、宽 100 m 的长方形土地划分为两块小长方形土地，分别种植这两种作物. 怎样划分这块土地，才能使甲、乙两种作物的总产量的比是 3∶4?

分析： 如图 10.3-1，一种划分方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和长方形 $EBCF$.

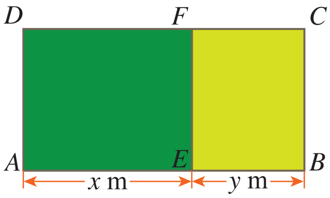


图 10.3-1

此时设 $AE = x$ m，$EB = y$ m，根据问题中涉及长度、产量的相等关系，列得方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad\quad}, \\ y = \underline{\qquad\quad}. \end{cases}$$

过长方形土地的长边上离一端________处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地. 较大一块土地种植______种作物，较小一块土地种植______种作物.

练习

1. 对于探究 2 中的问题，如果按照如图的方式划分土地，分别在长方形 $DMNC$ 和 $MABN$ 土地中种植甲、乙两种作物，那么 AM 的长度是多少？

（第 1 题）

$2x$	3	2
	$x+2y$	-3
		$4y$

（第 2 题）

2. 如图，3×3 的格子内填写了一些数和代数式. 为了使格子的各行、各列及对角线上的三个数之和均相等，x，y 各应取什么值？

3. 某地为打造运河风光带，雇用 A，B 两个工程队共同完成一段长为 180 m的河道的清理任务. 已知 A 工程队每天清理 12 m，B 工程队每天清理 8 m，两个工程队工作天数之和为 20 天，A，B 工程队分别清理了多长的河道？

探究 3

如图 10.3-2，丝路纺织厂与 A，B 两地由公路、铁路相连. 这家纺织厂从 A 地购进一批长绒棉运回工厂，制成纺织面料运往 B 地. 已知长绒棉的进价为 3.08 万元/t，纺织面料的出厂价为 4.25 万元/t，公路运价为 0.5 元/（t · km），铁路运价为 0.2 元/（t · km），且这两次运输共支出公路运费 5 200 元，铁路运费 16 640 元. 那么这批纺织面料的销售额比原料费（原料费只计长绒棉的价格）与运输费的和多多少元？

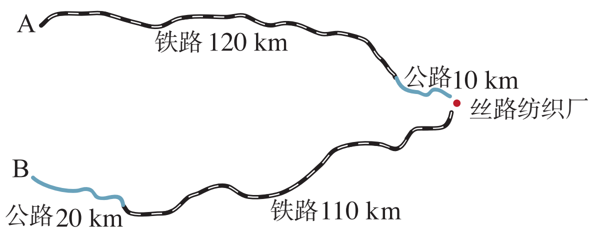


图 10.3-2

分析： 销售额与产品数量有关，原料费与原料数量有关. 设购买 x t 长绒棉，制成 y t 纺织面料. 根据题中数量关系填写表 10.3-1.

表 10.3-1

	x t 长绒棉	y t 纺织面料	合计
公路运费/元			
铁路运费/元			
价值/元			

题目所求的是______________，为此需先解出______与______.

由表 10.3-1，列得方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad\qquad}, \\ y = \underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

因此，这批纺织面料的销售额比原料费与运输费的和多__________元.

从以上探究可以看出，方程组是解决含有多个未知数问题的重要工具. 用方程组解决问题时，要根据问题中的数量关系列出方程组，求出方程组的解后，应进一步考虑它是否符合问题的实际意义.

练习

1. 某运输公司有大小两种型号的货车，2 辆大货车与 3 辆小货车一次可以运货 15.5 t，5 辆大货车与 6 辆小货车一次可以运货 35 t. 3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货多少吨？
2. 七年级的地质兴趣小组到一座山顶进行田野调查. 上山之前，20 名成员各买了一张缆车票，共花费 1 180 元. 缆车票价如右表所示，他们购买了往返票和单程票各多少张？

票种	票价/元
往返	80
单程	45

3. 甲地到乙地由一段上坡路与一段平路组成，一位自行车越野赛运动员在两地之间进行骑行训练. 如果他保持上坡的速度为 30 km/h，平路的速度为 40 km/h，下坡的速度为 50 km/h，那么他从甲地骑到乙地需 54 min，从乙地骑到甲地需 42 min. 甲地到乙地全程是多少千米？

习题 10.3

复习巩固

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-y=5,\\5y-1=3x+5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{17}{12},\\\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

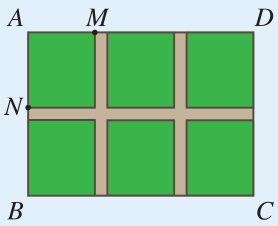
2. 一个户外运动俱乐部的成员完成了两天的徒步运动．两天的徒步时间分别为 8 h和 10 h，共走了 98 km，且第一天比第二天少走 2 km，这个俱乐部的成员两天徒步的平均速度各是多少？

3. 《算法统宗》里有这样一道题：我问开店李三公，众客都来到店中．一房七客多七客，一房九客一房空．李三公家的店有多少间客房，来了多少房客？

4. 某港口码头使用 A，B 两种型号的机器人搬运货物．在 24 h 内，3 台 A 型机器人和 2 台 B 型机器人共搬运货物 450 t，且每台 A 型机器人比 B 型机器人多搬运货物 25 t，每台 A 型机器人和每台 B 型机器人 24 h 的搬运量分别是多少？

综合运用

5. 如图，学校规划在一块长 18 m、宽 13 m 的长方形场地 $ABCD$ 上，分别设计与 AD，AB 平行的横向和纵向通道，其余部分铺上草皮．如果通道的宽度相等，六块草坪的形状、大小相同，其中一块草坪的两边 $AM:AN=8:9$，那么通道的宽是多少？



（第 5 题）

6. 一家广告公司为某学校制作文艺活动的展板、宣传册和横幅，其中宣传册的数量是展板的 5 倍．广告公司制作每件产品所需时间和所获利润如下表所示．

产品	展板	宣传册	横幅
时间/h	1	0.2	0.5
利润/元	60	3.5	20

若制作三种产品共需 25 h，所获利润为 975 元，求这三种产品的总件数．

7. 七年级书法兴趣小组到文具店购买 A，B 两种型号的毛笔，文具店的销售方式是：

（1）一次性购买 A 型毛笔不超过 20 支时，按零售价销售；超过 20 支时，超过部分每支的价格比零售价低 0.4 元.

（2）一次性购买 B 型毛笔不超过 15 支时，按零售价销售；超过 15 支时，超过部分每支的价格比零售价低 0.6 元.

这个小组共有 20 名同学，若每人买 1 支 A 型毛笔和 2 支 B 型毛笔，共需支付 325 元；若每人买 2 支 A 型毛笔和 1 支 B 型毛笔，共需支付 309 元. 这家文具店 A，B 型毛笔的零售价分别是多少？

拓广探索

8. 一家超市的账目记录显示，某天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；另一天，以同样的价格卖出同样的牙刷 52 支和牙膏 28 盒，收入 518 元. 这个记录是否有误？如果有误，请说明理由.

9. 编一道符合实际意义的应用题，使其中的未知数满足方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=21, \\ 3x+4y=29. \end{cases}$$

与同学交流一下，并解决这个问题.

*10.4　三元一次方程组的解法

前面我们通过列二元一次方程组解决了一些问题．实际上，有不少问题含有更多的未知数，类比二元一次方程组的研究方法，我们来解决这样的问题．

看下面的问题．

问题　在一次足球联赛中，一支球队共参加了 22 场比赛，积 47 分，且胜的场数比负的场数的 4 倍多 2．按照足球联赛的积分规则，胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分，那么这支球队胜、平、负各多少场？

解决这个问题的一个自然的想法是，设这个球队胜、平、负的场数分别为 x，y，z，根据题意，可以得到下面三个方程：

$$x+y+z=22,$$

$$3x+y=47,$$

$$x=4z+2.$$

这个问题的解必须同时满足上面三个条件，因此，我们把这三个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y+z=22, \\ 3x+y=47, \\ x=4z+2. \end{cases}$$

这个方程组含有三个未知数，且含有未知数的式子都是整式，含有未知数的项的次数都是 1，一共有三个方程，像这样的方程组叫作**三元一次方程组**．

怎样解三元一次方程组呢？我们知道，二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，化成一元一次方程求解．那么，能不能按照同样的思路，用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，把它化成二元一次方程组呢？

---

*　本节内容为选学内容．

让我们看前面列出的三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=22, & ①\\ 3x+y=47, & ②\\ x=4z+2. & ③\end{cases}$$

仿照前面学过的代入法，可以把③分别代入①②并化简，得到两个只含 y，z 的方程 $y+5z=20$ 和 $y+12z=41$，它们组成方程组

$$\begin{cases} y+5z=20,\\ y+12z=41.\end{cases}$$

你还能用其他方法解这个三元一次方程组吗?

解这个二元一次方程组，可以求出 y 和 z，进而可以求出 x.

从上面的分析可以看出，解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 这与解二元一次方程组的思路是一样的.

三元一次方程组 $\xrightarrow{\text{消元}}$ 二元一次方程组 $\xrightarrow{\text{消元}}$ 一元一次方程

例 1 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 3x+4z=7, & ①\\ 2x+3y+z=9, & ②\\ 5x-9y+7z=8. & ③\end{cases}$$

分析：方程①只含 x，z，因此，可以由②③消去 y，得到一个只含 x，z 的方程，与方程①组成一个二元一次方程组.

解：②×3+③，得

$$11x+10z=35. \quad ④$$

①与④组成方程组

$$\begin{cases} 3x+4z=7,\\ 11x+10z=35.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=5,\\ z=-2.\end{cases}$$

把 $x=5$，$z=-2$ 代入②，得

$$2\times5+3y-2=9,$$

$$y=\frac{1}{3}.$$

因此，这个三元一次方程组的解为

$$\begin{cases}x=5,\\ y=\dfrac{1}{3},\\ z=-2.\end{cases}$$

你还有其他解法吗？试一试，并与这种解法进行比较.

练习

解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases}x-2y=-9,\\ y-z=3,\\ 2z+x=47;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x-9z=17,\\ 3x+y+15z=18,\\ x+2y+3z=2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+y=3,\\ y+z=4,\\ z+x=5;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x-y+z=4,\\ 2x+3y-z=12,\\ x+y+z=6.\end{cases}$

在解决一些含有三个未知数的问题时，可以考虑列三元一次方程组，通过解方程组获得问题的答案.

例 2　在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=-1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=3$；当 $x=5$ 时，$y=60$. 求 a，b，c 的值.

分析：把 a，b，c 看作三个未知数，分别把已知的 x，y 值代入原等式，就可以得到一个三元一次方程组.

解：根据题意，列得三元一次方程组

$$\begin{cases}a-b+c=0, & ①\\ 4a+2b+c=3, & ②\\ 25a+5b+c=60. & ③\end{cases}$$

②－①，得

$$a+b=1. \quad ④$$

③－①，得

$$4a+b=10. \quad ⑤$$

④与⑤组成二元一次方程组

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 4a+b=10. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases}$$

把 $a=3$，$b=-2$ 代入①，得

$$c=-5.$$

因此 a，b，c 的值分别为 3，－2，－5.

例 3 一个三位数，各数位上的数的和为 14，百位上的数的 2 倍减去十位上的数的差是个位上的数的 $\frac{1}{3}$. 如果把这个三位数个位上的数与百位上的数交换位置，那么所得的新数比原数小 99. 求这个三位数.

分析： 把这个三位数各位上的数看成三个未知数，则根据题目中的三个相等关系，可以列三元一次方程组.

解： 设这个三位数百位上的数为 x，十位上的数为 y，个位上的数为 z. 根据题意，列得三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=14, & ① \\ 2x-y=\frac{1}{3}z, & ② \\ 100z+10y+x+99=100x+10y+z. & ③ \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=4, \\ y=7, \\ z=3. \end{cases}$$

因此这个三位数是 473.

练习

1. 甲、乙、丙三个数的和是 35，甲数的 2 倍比乙数大 5，乙数的 $\frac{1}{3}$ 等于丙数的 $\frac{1}{2}$. 求这三个数.

2. 在等式 $z=ax+by+c$ 中，当 $x=1$，$y=2$ 时，$z=8$；当 $x=2$，$y=1$ 时，$z=5$；当 $x=-1$，$y=-1$ 时，$z=4$. 求 a，b，c 的值.

习题 10.4

复习巩固

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-7, \\ 5x+3y+2z=2, \\ 3x-4z=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 3y-2z=1, \\ 7x+5z=\frac{19}{4}. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}, \\ 2x-y+2z=27; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9, \\ 3x-2y+5z=11, \\ 5x-6y+7z=13. \end{cases}$

综合运用

3. 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-2$；当 $x=-1$ 时，$y=20$；当 $x=\frac{3}{2}$ 与 $x=\frac{1}{3}$ 时，y 的值相等. 求 a，b，c 的值.

4. 一个三位数，十位上的数等于百位上的数的 2 倍，百位上的数的 3 倍减去个位上的数等于十位上的数的 $\frac{1}{4}$，且各数位上的数的和为 11. 求这个三位数.

拓广探索

5. 甲地到乙地全程是 3.3 km，由一段上坡路、一段平路、一段下坡路组成. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 51 min，从乙地到甲地需 53.4 min. 从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的路程各是多少?

中国古代数学的光辉成就——解多元一次方程组

我国古代很早就开始对多元一次方程组进行研究，古代数学著作《九章算术》中专门设“方程”章讨论多元一次方程组. 多元一次方程组的解法是我国在世界上领先的重大数学成就之一. 我国古代解多元一次方程组的方法主要有直除法和互乘相消法.

直除法

$$\begin{cases}3x+2y+z=39, & ①\\ 2x+3y+z=34, & ②\\ x+2y+3z=26, & ③\end{cases} \xrightarrow[③\times3-①]{②\times3-①-①} \begin{cases}3x+2y+z=39,\\ 5y+z=24,\\ 4y+8z=39.\end{cases}$$

继续使用此法，将一行消到只剩下一个未知数，即可求解.

《九章算术》中的“直除法”具有普遍性，相当于现代高等代数的矩阵解法.《九章算术》是世界上最早记录这种解法的著作.

魏晋

刘徽给出了直除法的理论基础——举率以相减，不害余数之课也，即两个方程对应相减，方程组的解不变. 刘徽还创造了“互乘相消法”.

北宋

贾宪根据题目特点灵活地选择直除法和互乘相消法，并且不再借助具体问题阐述如何解多元一次方程组，他将中国传统数学的抽象化推进到了一个新阶段.

解多元一次方程组的方法反映了中国古代数学程序化的特点．宋元时期，中国数学家朱世杰又发展了多元高次方程组的求解方法．我国著名数学家吴文俊先生就借鉴中国古代数学的思想和方法，古为今用，创立了数学机械化理论，在国际上产生了巨大的影响．

互乘相消法

$$\begin{cases}5x+2y=10, & ①\\ 2x+5y=8, & ②\end{cases} \xrightarrow[②\times 5]{①\times 2} \begin{cases}10x+4y=20,\\ 10x+25y=40.\end{cases}$$

然后用第二行减去第一行，消去 x，可以得到 y 的值．

互乘相消法不但起到事半功倍的作用，而且可以推广，正如刘徽所说："以小推大，虽四、五行不异也．"

南宋

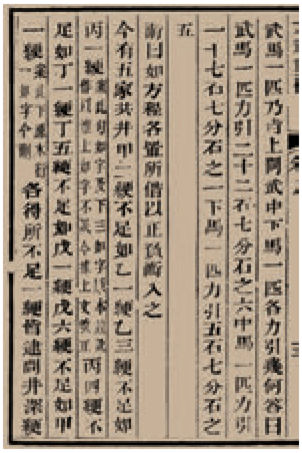
清

杨辉率先以接近现代的形式列、解多元一次方程组，并对如何解多元一次方程组进行了系统的论述．

梅文鼎系统整理和总结了中国传统数学中多元一次方程组的解法．

阅读与思考

中国古代著名的一次不定方程组问题


武馬一匹乃皆上問武中下馬一匹各力引幾何荅曰
武馬一匹力引二十二石七分石之六中馬一匹力引
一十七石七分石之一下馬一匹力引五石七分石之
五
術曰如方程各置所借以正負術入之
今有五家共井甲二綆不足如乙一綆乙三綆不足如
丙一綆丙四綆不
足如丁一綆丁五綆不足如戊一綆戊六綆不足如甲
一綆各得所不足一綆皆逮問井深綆

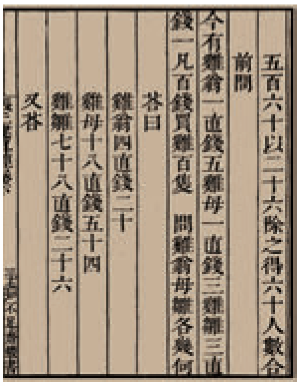
《九章算术》的“方程”章中记载了一道有趣的“五家共井问题”：今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠．各得所不足一绠，皆逮．问井深、绠长各几何．

这个问题的意思是：今有五家人共用一口水井，每家都备有打水绳，但各家的绳长可能不同．如果把 2 条甲家的绳子和 1 条乙家的绳子接起来，刚好能够着井里的水面；把 3 条乙家的绳子和 1 条丙家的绳子接起来，刚好能够着井里的水面；……那么这五家的打水绳各有多长？井深是多少？

显然，问题中包含了多个未知数．若设甲、乙、丙、丁、戊各家绳长分别为 x，y，z，u，v，井深为 h，则可列得方程组

$$\begin{cases}2x+y=h,\\3y+z=h,\\4z+u=h,\\5u+v=h,\\6v+x=h.\end{cases}\qquad(*)$$

与二元、三元一次方程组不同的是，上述一次方程组有 6 个未知数，5 个方程．任意给定 h 的一个值，就可求出 x，y，z，u，v 的值，也就是说，（$*$）有无穷多个解．像（$*$）这样的方程组被称为不定方程组．


五百六十以二十六除之得六十人數合
前問
今有雞翁一直錢五雞母一直錢三雞雛三直
錢一凡百錢買雞百隻 問雞翁母雛各幾何
荅曰
雞翁四直錢二十
雞母十八直錢五十四
雞雛七十八直錢二十六
又荅

“五家共井问题”可能是中国古代数学中最早出现的不定方程组问题．到了 5 世纪，《张丘建算经》中记载的“百鸡问题”引起了后世中外数学家的广泛兴趣，成了中国古代数学中流传更广的不定方程组问题．

“百鸡问题”的意思是：如果 1 只公鸡值 5 个钱，1 只母鸡值 3 个钱，3 只小鸡值 1 个钱．现用 100 个钱，买了 100 只鸡，问公鸡、母鸡、小鸡各多少只．

如果设公鸡、母鸡、小鸡的只数分别为 x，y，z，那么可列得一次不定方程组

$$\begin{cases}5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100,\\x+y+z=100.\end{cases}$$

这个方程组的解必须是正整数，你能找出其中一个正整数解吗？

事实上，数学家研究的不定方程组常常把解限定在正整数、整数、有理数等范围内。“百鸡问题”属于典型的一次不定方程组问题。在张丘建之后，我国数学家又编制了许多其他一次不定方程组问题，但都没有给出这类方程组的一般解法。直到 19 世纪，清代数学家利用南宋数学家秦九韶（约 1202—约 1261）发现的“大衍求一术”，终于使一次不定方程组问题的求解获得了新的突破。

数学活动

活动1　二元一次方程的“图象”

（1）在平面直角坐标系中，你能把二元一次方程 $x-y=0$ 的一个解用一个点表示出来吗？标出一些以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点，过这些点中的任意两点作直线，你有什么发现？在这条直线上任取一点，这个点的坐标是方程 $x-y=0$ 的解吗？

一般地，以一个二元一次方程的解为坐标的点的全体叫作这个方程的图象。想一想，二元一次方程的图象是什么几何图形？

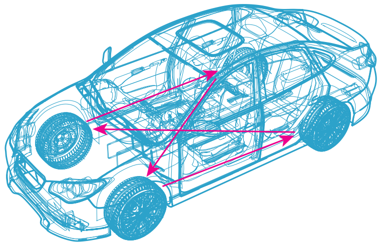
（2）根据（1）的结论，在同一平面直角坐标系中画出二元一次方程组

$$\begin{cases}2x+y=4,\\x-y=-1\end{cases}$$

中的两个二元一次方程的图象。由这两个二元一次方程的图象，你能得出这个二元一次方程组的解吗？

活动2　轮胎换位问题

随着人们生活水平的提高，很多家庭都购置了小汽车．大多数小汽车是前轮驱动和转向的，所以前轮的磨损程度比后轮严重．如果前轮报废，换上新轮胎，而后轮继续使用原来的轮胎，那么汽车行驶的安全性和乘坐的舒适性都将大打折扣；如果同时更换前后轮的轮胎，用车成本又会提高．为了解决这个问题，一般的汽车使用手册上都有定期给前后轮的轮胎换位的建议．

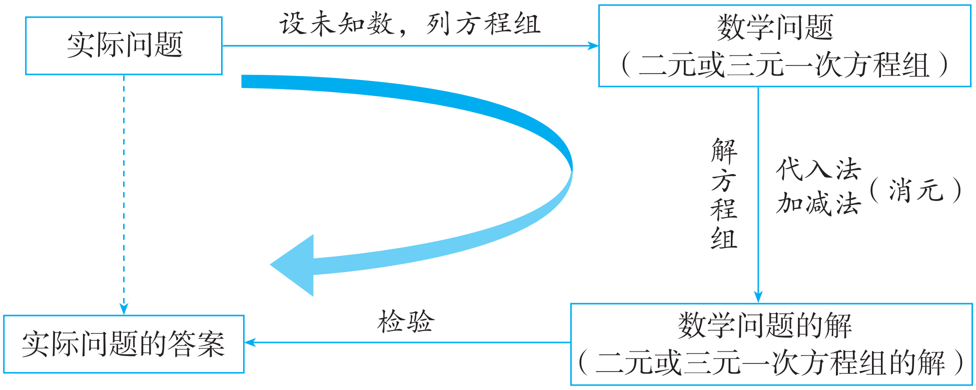


为了让轮胎均匀磨损并延长轮胎的使用寿命，我们建议每行驶 10 000 km 进行一次轮胎换位．

资料显示：汽车前轮轮胎一般应在汽车行驶达到 60 000 km 时报废，而后轮轮胎应在汽车行驶达到 80 000 km 时报废．如果在轮胎的使用寿命内只交换一次前、后轮轮胎，那么应在汽车行驶里程达到多少时，交换前、后轮轮胎，能使汽车的两对轮胎同时报废？并求出轮胎报废时汽车的行驶里程．

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过实际问题引入了二元一次方程（组），学习了二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法，运用二元一次方程组解决了一些实际问题. 在此基础上，学习了简单的三元一次方程组及其解法.

消元是解二（三）元一次方程组的基本思想. 根据方程组的具体情况，利用代入消元法或加减消元法，把“三元”转化为“二元”，把“二元”转化为“一元”，这一过程体现了化归思想. 通过解二（三）元一次方程组，你的运算能力也得到了提升.

二（三）元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型，在现实中具有广泛的应用. 用它解决实际问题时，要注意分析问题中的各种数量关系，找出其中的相等关系，引进适当的未知数，列出相应的方程组，解方程组并检验解的意义，这一过程有助于培养你的模型观念和应用意识.

请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧.

1. 什么是二元一次方程？什么是二元一次方程的解？什么是二（三）元一次方程组？什么是二（三）元一次方程组的解？

2. 举例说明怎样用代入法和加减法解二元一次方程组. “代入”与“加

减”的目的是什么？

3. 解三元一次方程组与解二元一次方程组有什么联系与区别？你能说一说“消元”的思想方法在解三元一次方程组中的体现吗？

4. 提出一个实际问题，并用二元或三元一次方程组解决它．你能说一说用方程组解决实际问题的基本思路吗？

复习题 10

复习巩固

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} a=2b+3, \\ a=3b+20; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=13, \\ x=6y-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=4, \\ 4x+2y=-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-y=110, \\ 9y-x=110. \end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3m+b=11, \\ -4m-b=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0.6x-0.4y=1.1, \\ 0.2x-0.4y=2.3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4f+g=15, \\ 3g-4f=-3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 0.5x+3y=-6, \\ 0.5x+y=2. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4(x-y-1)=3(1-y)-2, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{3}-\dfrac{x+y}{4}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

*4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+y-3z=11, \\ x+y+z=12; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-4y+4z=13, \\ 2x+7y-3z=19, \\ 3x+2y-z=18. \end{cases}$

5. 1 号仓库与 2 号仓库共存粮 450 t．现从 1 号仓库运出存粮的 60%，从 2 号仓库运出存粮的 40%，结果 2 号仓库剩余粮食比 1 号仓库剩余粮食多 30 t．1 号仓库与 2 号仓库原来各存粮多少吨？

综合运用

6. 王芳花 19 元买了若干支记号笔和中性笔，记号笔和中性笔的价格分别为 5 元/支和 3 元/支. 王芳买了多少支记号笔？多少支中性笔？

7. 为了提倡节约用水，某市根据居民每月的用水量实行阶梯水价：每户每月用水量不超过 12 m^3 时，按一级单价收费；超过 12 m^3 时，超过部分按二级单价收费. 五月份张华家用水 14 m^3，缴费 37.6 元；李明家用水 17 m^3，缴费 47.2 元. 那么这个市一级水费、二级水费的单价分别是多少？

8. “冰墩墩”和“雪容融”分别是北京 2022 年冬奥会和冬残奥会的吉祥物. 一家商店连续两个月销售规格为“10 cm”的“冰墩墩”和“雪容融”摆件，销售情况如下表所示.

	销售量/件		销售额/元
	冰墩墩	雪容融	
第 1 个月	100	40	12 320
第 2 个月	160	60	19 360

分别求“冰墩墩”和“雪容融”摆件的零售价格.

9. 甲、乙两人都以不变的速度在环形路上跑步. 如果同时同地出发，反向而行，每隔 2 min 相遇一次；如果同时同地出发，同向而行，每隔 6 min 相遇一次. 已知甲比乙跑得快，甲、乙两人跑一圈各需要多少分钟？

10. 《九章算术》中有这样一道题：今有大器五小器一容三斛，大器一小器五容二斛. 问大小器各容几何. 意思是：有大小两种容器，已知 5 个大容器和 1 个小容器的总容量为 3 斛（斛是过去的一种量器），1 个大容器和 5 个小容器的总容量为 2 斛. 大、小容器的容量分别是多少斛？

拓广探索

11. 现有 1 角、5 角、1 元硬币各 10 枚，从中取出 15 枚，共值 7 元. 1 角、5 角、1 元硬币各取出多少枚？

12. 某电脑公司有 A 型、B 型、C 型三种型号的电脑，其中 A 型电脑每台 6 000 元，B 型电脑每台 4 000 元，C 型电脑每台 2 500 元. 某中学现有资金 100 500 元，计划全部用于从这家电脑公司购进 36 台两种型号的电脑. 请你设计几种不同的购买方案供这所学校选择，并说明理由.

第十一章　不等式与不等式组

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系．现实世界中存在大量涉及不等关系的问题．例如，当两家超市推出不同的优惠方案时，到哪家超市购物花费较少？这个问题就蕴含了不等关系．对于这样的问题，常常要分析问题中的数量关系，找到其中的不等关系，列出相应的数学式子——不等式（组），并通过解不等式（组）得出结论．这样的思路与利用方程（组）研究相等关系问题的思路是类似的．

本章我们将从什么是不等式说起，类比等式和方程，探究不等式的性质，学习一元一次不等式（组）及其解法，并利用不等式的知识解决一些问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用．

11.1 不等式

前面我们学习了用等式表示问题中的相等关系，本节我们将学习不等式及其性质．有了不等式，就可以表示问题中的不等关系了．

11.1.1 不等式及其解集

问题　一辆汽车在高速公路上匀速行驶，6:00时汽车距前方的 A 地 210 km，汽车要在 8:00之前驶过 A 地，车速应满足什么条件？

分析：设车速是 x km/h.

汽车要在 8:00 之前驶过 A 地，从时间上看，就是以 x km/h 的速度行驶 210 km 的时间不到2 h，这个不等关系可以表示为

$$\frac{210}{x}<2. \tag{①}$$

从路程上看，就是以 x km/h 的速度行驶 2 h 的路程要超过 210 km，这个不等关系可以表示为

$$2x>210. \tag{②}$$

像①②这样用符号“<”或“>”表示不等关系的式子，叫作**不等式**(inequality)．像 $a+2\neq a-2$ 这样用“≠”表示不等关系的式子也是不等式．

有些不等式中不含字母，例如 $3<4$，$-1>-2$；有些不等式中含有字母，例如①②这样的不等式．我们常用不等式来表示不等关系．

例 1　用不等式表示下列不等关系：

(1) a 与 15 的和大于 27；

(2) b 的一半与 3 的差是负数；

(3) 某县在乡村振兴项目的援助下，共种植 1 333 hm^2 猕猴桃，种植面积超过全县原有猕猴桃种植面积的 18 倍．

解：(1) $a+15>27$；

（2）$\frac{b}{2}-3<0$；

（3）设这个县原有猕猴桃种植面积为 x hm^2，那么 $1\ 333>18x$，也可以表示为 $18x<1\ 333$.

当不等式中的字母表示未知数时，经常需要求出未知数应取哪些值. 如对于前面问题中的不等式 $2x>210$，我们需要了解满足条件的车速 x 的值. 例如，当 $x=90$ 时，$2x=180$，不等式 $2x>210$ 不成立；当 $x=110$ 时，$2x=220$，不等式 $2x>210$ 成立. 这就是说，当 x 取某些值（如 110）时，不等式 $2x>210$ 成立；当 x 取某些值（如 90）时，不等式不成立.

与方程的解类似，我们把使不等式成立的未知数的值叫作**不等式的解**. 例如，110 是不等式 $2x>210$ 的解，而 90 不是不等式 $2x>210$ 的解.

探究

再取 x 的一些值试一试，看一看哪些是不等式 $2x>210$ 的解.

x	…	90				110	…
$2x$	…	180				220	…

观察不等式 $2x>210$ 的解，它们都满足什么条件？

可以发现，当 $x>105$ 时，不等式 $2x>210$ 总成立；而当 $x<105$ 或 $x=105$ 时，不等式 $2x>210$ 不成立. 这就是说，任何一个大于 105 的数都是不等式 $2x>210$ 的解，这样的解有无数个；任何一个小于或等于 105 的数都不是不等式 $2x>210$ 的解. 因此，$x>105$ 表示了能使不等式 $2x>210$ 成立的 x 的取值范围.

由上可知，在前面的问题中，汽车要在 8:00 之前驶过 A 地，车速应大于 105 km/h.

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的**解集**. 例如 $x>105$ 是不等式 $2x>210$ 的解集，它可以在数轴上直观表示（图 11.1-1）. 求不等式的解集的过程叫作**解不等式**.

图 11.1-1

在表示 105 的点上画空心圆圈，表示解集不包含这个点所对应的数.

练习

1. 用不等式表示下列不等关系：

(1) a 是正数；　(2) 5 与 x 的和小于 7；

(3) -4 与 m 的积大于 8；　(4) m 与 1 的差小于 m 的 3 倍；

(5) 经检测，某公园的环境噪声在 50 dB（分贝）以下；

(6) 某市有公交车 12 000 辆，其中新能源公交车所占比例超过 66%.

2. 下列数中哪些是不等式 $x+3>6$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2.5,\ 0,\ 1,\ 2.5,\ 3,\ 3.2,\ 4.8,\ 8,\ 12.$$

3. 直接说出下列不等式的解集：

(1) $x+3>6$；　(2) $2x<8$；　(3) $x-2>0$.

11.1.2　不等式的性质

对于某些简单的不等式，可以直接得出它们的解集，例如不等式 $x+4>10$ 的解集是 $x>6$，不等式 $2x<6$ 的解集是 $x<3$. 但是对于比较复杂的不等式，例如 $\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接得出它的解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式.

与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 为此，我们先来看一看不等式有什么性质.

因为不等式与等式一样，都是对大小关系的刻画，所以可以类比等式的性质研究不等式的性质.

类比等式的性质，你能猜想不等式有哪些性质吗？

与等式类似，关于不等式，有以下两个基本事实.

(1) 交换不等式两边，不等号的方向改变：

$$\text{如果 } a>b\text{，那么 } b<a.$$

例如，由 $5>x$，可得 $x<5$.

(2) 不等关系可以传递：

$$\text{如果 } a>b\text{，}b>c\text{，那么 } a>c.$$

例如，由 $y>x$，$x>-3$，可得 $y>-3$.

可以借助数轴理解这两个基本事实.

我们知道，等式两边加或减同一个数（或式子），乘或除以同一个数（除数不为 0），结果仍相等. 不等式是否也有类似的性质呢？

先考虑不等式两边加（或减）同一个数的情况.

探究

用“$>$”或“$<$”填空，并观察不等号的方向是否改变，总结其中的规律：

(1) $5>3$,

$5+2$______$3+2$,

$5+0$______$3+0$,

$5+(-2)$______$3+(-2)$;

(2) $-1<3$,

$-1+4$______$3+4$,

$-1+0$______$3+0$,

$-1+(-7)$______$3+(-7)$.

根据发现的规律填空：不等式两边加同一个数，不等号的方向________.

换一些其他数，验证这个发现.

由于减法可以转化为加法，因而这个规律对于不等式两边减去同一个数的情形仍然成立.

一般地，不等式有如下性质：

不等式的性质 1　不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.

可以借助数轴理解这个性质.

如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$.

接下来，考虑不等式两边乘（或除以）同一个不为 0 的数的情况.

探究

用“$>$”或“$<$”填空，并观察不等号的方向是否改变，总结其中的规律：

(1) $6>2$,

6×5______2×5,

$6\times(-5)$______$2\times(-5)$;

(2) $-2<3$,

-2×4______3×4,

$-2\times(-0.5)$______$3\times(-0.5)$.

根据发现的规律填空：不等式两边乘同一个正数，不等号的方向________；不等式两边乘同一个负数，不等号的方向________.

由于除以一个不为 0 的数等于乘这个数的倒数，并且这个数的倒数和它的符号相同，因而这个规律对于不等式两边除以同一个不为 0 的数的情形仍然成立.

换一些其他数，验证这个发现. 如果不等式两边乘 0，结果又如何呢？

一般地，不等式还有如下两个性质：

不等式的性质 2　不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.

$$\text{如果 } a>b,\ c>0, \text{那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).$$

不等式的性质 3　不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

$$\text{如果 } a>b,\ c<0, \text{那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).$$

比较不等式的性质 2 和性质 3，指出它们有什么区别. 再比较不等式的性质和等式的性质，它们有什么异同？

例 2　已知 $a>b$，比较下列两个式子的大小，并说明依据.

（1）$a+3$ 与 $b+3$；　　（2）$-2a$ 与 $-2b$.

解：（1）因为 $a>b$，

所以　$a+3>b+3$（不等式的性质 1）.

（2）因为 $a>b$，

所以　$-2a<-2b$（不等式的性质 3）.

练习

1. 已知 $p>q$，用“$>$”或“$<$”填空，并说明依据：

（1）$p+\frac{1}{2}$____$q+\frac{1}{2}$；（2）$p-2$____$q-2$；（3）$p+2m$____$q+2m$；

（4）$-5p$____$-5q$；（5）$\frac{p}{3}$____$\frac{q}{3}$；（6）$4p+1$____$4q+1$.

2. 已知 $m>3$，利用不等式的性质写出下列各式的取值范围：

（1）$m+5$；（2）$\frac{m}{6}$；（3）$-2m$；（4）$3m-4$.

与解方程类似，解不等式要借助不等式的性质，将不等式逐步化为 $x>m$ 或 $x<m$（m 为常数）的形式.

例 3　利用不等式的性质解下列不等式：

（1）$x-7>26$；　　（2）$3x<2x+1$；

（3）$\frac{2}{3}x>50$；　　（4）$-4x>3$.

解：（1）根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7,$$
$$x>33.$$

（2）根据不等式的性质 1，不等式两边减 $2x$，不等号的方向不变，所以

$$3x-2x<2x+1-2x,$$
$$x<1.$$

（3）根据不等式的性质 2，不等式两边乘 $\frac{3}{2}$，不等号的方向不变，所以

$$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}x>\frac{3}{2}\times 50,$$
$$x>75.$$

（4）根据不等式的性质 3，不等式两边除以 -4，不等号的方向改变，所以

$$\frac{-4x}{-4}<\frac{3}{-4},$$
$$x<-\frac{3}{4}.$$

还可以在数轴上直观地表示例 3 中不等式的解集，如不等式 $x-7>26$ 的解集 $x>33$ 在数轴上的表示如图 11.1-2 所示.

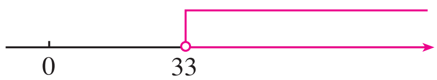


图 11.1-2

不等式 $3x<2x+1$ 的解集 $x<1$ 在数轴上的表示如图 11.1-3 所示.

图 11.1-3

请你分别在数轴上表示例 3 中其他两个不等式的解集.

人民教育出版社

除了含有$<$，$>$，$\neq$的不等式，像 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系，它们也是不等式．例如，$x\geqslant 3$ 表示 $x>3$ 或 $x=3$，即 x 可以取 3 和大于 3 的所有值．符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，也可以说是“不小于”；符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也可以说是“不大于”．

符号“$\geqslant$”与“$>$”的含义有什么区别？“$\leqslant$”与“$<$”呢？

$a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 形式的不等式，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质．例如，如果 $a\geqslant b$，那么 $-2a\leqslant -2b$．

生活中也有很多不等关系可以用形如 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 的不等式表示．如图 11.1-4 所示的高速公路的限速标志，表示在此道路上行驶的汽车的最低车速应为 80 km/h，最高车速应为 100 km/h．如果用 v（单位：km/h）表示汽车的速度，则 v 应满足：$v\geqslant 80$ 且 $v\leqslant 100$，或表示为 $80\leqslant v\leqslant 100$．

图 11.1-4

回到本节开头的问题，如果汽车所行驶道路的最高限速是 120 km/h，那么车速 x 应满足什么条件？

例 4 如图 11.1-5，一个长方体形状的鱼缸长 10 dm，宽 3.5 dm，高 7 dm．若鱼缸内已有水的高度为 1 dm，现准备向鱼缸内继续注水．用 V（单位：dm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围并在数轴上表示．

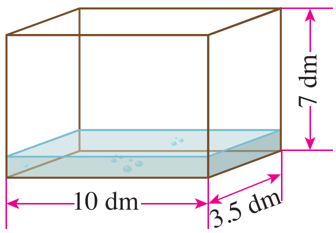


图 11.1-5

分析：问题中的不等关系是：已有水的体积与新注入水的体积之和不能超过鱼缸的容积．

解：因为“已有水的体积＋新注入水的体积 $V\leqslant$鱼缸的容积”，所以

$$10\times 3.5\times 1+V\leqslant 10\times 3.5\times 7,$$

解得

$$V\leqslant 210.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，所以 V 的取值范围是

$$0\leqslant V\leqslant 210.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图 11.1-6 所示.

图 11.1-6

在表示 0 和 210 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个点所对应的数.

练习

1. 关于 x 的不等式的解集在数轴上的表示如图所示，写出相应的解集.

（1）


（2）


（3）


2. 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$x+5>-1$；　　（2）$4x<3x+5$；

（3）$\frac{1}{7}x\leqslant\frac{6}{7}$；　　（4）$-8x>10$.

3. 某日北京的最低气温是 19 ℃，最高气温是 28 ℃，用不等式表示这天的气温 t（单位：℃）的变化范围.

习题 11.1

复习巩固

1. 下列数中哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2,\ 0,\ 3,\ 3.01,\ 4,\ 6,\ 100.$$

2. 用不等式表示下列不等关系：

（1）a 与 5 的和是正数；　　（2）b 与 12 的差大于-5；

（3）c 的 4 倍大于或等于 8；

（4）某市 2021 年空气质量为优良的天数比 2017 年的 224 天多出的天数超过了 60.

3. 直接写出下列不等式的解集：

（1）$x+2>6$；　　（2）$2x<-8$；

（3）$x-2>0.1$；　　（4）$-3x<10$.

4. 已知 $m>n$，用“$<$”或“$>$”填空，并说明依据：

（1）$m-5\underline{\qquad}n-5$；　　（2）$6m\underline{\qquad}6n$；

（3）$-\frac{1}{3}m\underline{\qquad}-\frac{1}{3}n$；　　（4）$m+3n\underline{\qquad}4n$.

5. 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$x+3>-1$；　　（2）$6x\leqslant 5x-7$；

（3）$-\frac{1}{3}y<\frac{2}{3}$；　　（4）$4y\geqslant -12$.

综合运用

6. 陶器和瓷器被誉为“土与火的艺术”，陶瓷的制作工艺离不开人们对火焰的利用和温度的控制. 我国古代窑工根据火焰的不同色调，就可以推测窑内的大致温度，其对照情况如右表所示. 设窑内温度为 t ℃.

火焰色调	温度 t/℃
最初赤色	475
最初赤色至暗赤	475～650
暗赤至樱桃红	650～750
樱桃红至鲜红	750～820
鲜红至橘黄	820～900
橘黄至黄色	900～1 090
黄色至浅黄色	1 090～1 320
浅黄色至白色	1 320～1 540
灰白色	1 540 以上

（1）用不等式表示当火焰色调为“暗赤至樱桃红”时，窑内温度的范围；

（2）烧制某瓷器时，窑内温度的范围是 $1\,260\leqslant t\leqslant 1\,310$，窑内火焰的色调是怎样的?

7. 已知 $a>b$，用“$<$”或“$>$”填空，并说明依据：

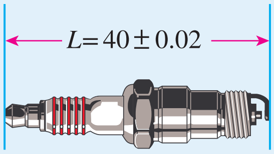
（1）$2a-5\underline{\qquad}2b-5$；　　（2）$-3.5b+1\underline{\qquad}-3.5a+1$.

8. 用不等式表示下列不等关系，写出解集并在数轴上表示解集：

（1）x 的 3 倍大于 1；　　（2）x 与 3 的和不小于 7；

（3）y 的 $\frac{1}{4}$ 小于或等于 -2；　　（4）y 的 2 倍小于 y 与 1 的差.

9. 如图是某机器零件的设计图纸（图中长度单位：mm），用不等式表示零件长度 L 的合格尺寸（L 的取值范围）.



（第 9 题）

拓广探索

10. 某市地铁票收费标准如下：

> 不超过 6 km 3 元；超过 6 km 到 12 km（含）4 元；
> 超过 12 km 到 22 km（含）5 元；超过 22 km 到 32 km（含）6 元；
> 超过 32 km 部分，每增加 1 元可再乘坐 20 km.

一位乘客单次乘坐地铁购票花费了 8 元，设他乘坐地铁的里程为 x km，用不等式表示 x 的范围.

11. 有一个两位数，如果把它的个位上的数 a 和十位上的数 b 对调，那么什么情况下得到的两位数比原来的两位数大？什么情况下得到的两位数比原来的两位数小？什么情况下得到的两位数等于原来的两位数？

12. 已知三个正整数 a，b，c 满足 $a<b<c$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，求 a，b，c.

阅读与思考

用求差法比较大小

制作某产品有两种用料方案. 方案一：用 4 块 A 型钢板，8 块 B 型钢板；方案二：用 3 块 A 型钢板，9 块 B 型钢板. A 型钢板的面积比 B 型钢板大. 从省料角度考虑，应选哪种方案？

设 A、B 型钢板的面积分别为 x 和 y，则两种方案用料面积分别为 $4x+8y$ 和 $3x+9y$. 现在需要比较这两个数量的大小.

两个数量的大小可以通过它们的差来判断. 如果两个数 a，b 比较大小，那么

当 $a>b$ 时，一定有 $a-b>0$；

当 $a=b$ 时，一定有 $a-b=0$；

当 $a<b$ 时，一定有 $a-b<0$.

反过来也对，即

当 $a-b>0$ 时，一定有 $a>b$；

当 $a-b=0$ 时，一定有 $a=b$；

当 $a-b<0$ 时，一定有 $a<b$.

因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正负判断对象的大小.

用求差的方法，你能回答前面的用料问题吗？

11.2 一元一次不等式

不等式有多种类型. 与学习了方程后重点研究一元一次方程类似，本节我们研究一类简单的不等式，探索它的解法，并用它解决一些实际问题.

思考

观察下面的不等式：

$$x-7>26,\ 3x<2x+1,\ \frac{2}{3}x>50,\ -4x>3.$$

它们有哪些共同特征？

可以发现，上述每个不等式都只含有一个未知数，且含有未知数的式子都是整式，未知数的次数是 1. 类似于一元一次方程，只含有一个未知数，且含有未知数的式子都是整式，未知数的次数是 1 的不等式，叫作**一元一次不等式**(linear inequality with one unknown).

在上一节例 3 解不等式

$$x-7>26$$

的过程中，根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，得

$$x-7+7>26+7,$$

即

$$x>26+7.$$

这一过程相当于把不等式 $x-7>26$ 左边的项 “-7”，变号为 “$+7$” 后移到右边. 这就是说，解不等式时也可以 “移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不等号的方向不变.

一般地，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集.

例 1 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $3(x-1)<x-2$；　　(2) $\frac{x-5}{4}+2\geqslant\frac{5x+1}{6}$.

解：（1）去括号，得

$$3x-3<x-2.$$

移项，得

$$3x-x<-2+3.$$

合并同类项，得

$$2x<1.$$

系数化为 1，得

$$x<\frac{1}{2}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 11.2-1 所示.

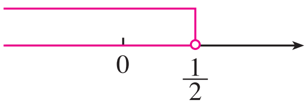


图 11.2-1

（2）去分母，得

$$3(x-5)+24\geqslant 2(5x+1).$$

去括号，得

$$3x-15+24\geqslant 10x+2.$$

移项，得

$$3x-10x\geqslant 2+15-24.$$

合并同类项，得

$$-7x\geqslant -7.$$

系数化为 1，得

$$x\leqslant 1.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 11.2-2 所示.

图 11.2-2

思考

解一元一次不等式与解一元一次方程的步骤和依据有什么类似之处？

归纳

解一元一次方程，要依据等式的性质，将方程逐步化为 $x=m$ 的形式；而解一元一次不等式，则要依据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<m$（$x\leqslant m$）或 $x>m$（$x\geqslant m$）的形式.

练习

1. 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$5x+15>4x-1$；　（2）$2(x+5)\leqslant 3(x-5)$；

（3）$\dfrac{x-1}{7}>\dfrac{2x+5}{3}$；　（4）$\dfrac{x+1}{6}\geqslant\dfrac{2x-5}{4}+1$.

2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？

（1）$2(x+1)$ 大于或等于 1；

（2）$4x$ 与 7 的和不小于 6；

（3）y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差；

（4）$3y$ 与 7 的和的 $\frac{1}{4}$ 小于 -2.

与用一元一次方程解决实际问题类似，通过用不等式表示实际问题中的不等关系，可以把实际问题转化为数学问题，进而通过解不等式得到实际问题的答案.

例 2 七年级举办古诗词知识竞赛，共有 20 道题，每一题答对得 10 分，答错或不答都扣 5 分. 如果规定初赛成绩超过 90 分晋级决赛，那么至少要答对多少道题才能成功晋级？

分析：“初赛成绩超过 90 分”是问题中蕴含的不等关系，可以根据这个不等关系列出不等式.

解：设初赛答对了 x 道题.

根据“初赛成绩超过 90 分”晋级决赛，列得不等式

$$10x-5(20-x)>90.$$

去括号，得

$$10x-100+5x>90.$$

移项，合并同类项，得

$$15x>190.$$

系数化为 1，得

$$x>12\frac{2}{3}.$$

由 x 应为正整数，可得 x 至少为 13.

答：初赛至少要答对 13 道题才能成功晋级.

例 3 某市去年万元地区生产总值能耗为 0.320 t 标准煤，如果计划使今年万元地区生产总值能耗比去年的下降率不小于 5%，那么这个市今年万元地区生产总值能耗至多为多少？

> 万元地区生产总值能耗是指每万元地区生产总值所消费的能源总量（折算为标准煤），其下降率是衡量一个地区节能减排成效的重要指标.

人民教育出版社

分析："今年万元地区生产总值能耗比去年的下降率不小于 5%"是问题中蕴含的不等关系，即

$$\frac{\text{去年万元地区生产总值能耗}-\text{今年万元地区生产总值能耗}}{\text{去年万元地区生产总值能耗}}\times 100\%\geqslant 5\%.$$

解：设这个市今年万元地区生产总值能耗为 x t 标准煤.

根据题意，列得不等式

$$\frac{0.320-x}{0.320}\times 100\%\geqslant 5\%.$$

去分母，得

$$0.320-x\geqslant 0.320\times 5\%.$$

移项，合并同类项，得

$$-x\geqslant -0.304.$$

系数化为 1，得

$$x\leqslant 0.304.$$

答：这个市今年万元地区生产总值能耗至多为 0.304 t 标准煤.

练习

1. 某工程队计划在 10 天内修路 6 km. 施工前 2 天修完 1.2 km 后，计划发生变化，准备至少提前 2 天完成修路任务，以后几天内平均每天至少要修路多少?
2. 一家商店以每辆 340 元的进价购入一批自行车共 150 辆，并以每辆 450 元的价格销售. 两个月后，自行车的销售额已超过这批自行车进货的总费用，这时至少已售出多少辆自行车?

下面来看本章引言中的问题.

例 4　甲、乙两超市以同样价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲超市累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按九折收费；在乙超市累计购物超过 50 元后，超出 50 元的部分按九五折收费. 顾客到哪家超市购物花费较少?

分析：在甲超市购物超过 100 元后享受优惠，在乙超市购物超过 50 元后

享受优惠．因此，需要分三种情况讨论：

（1）累计购物不超过 50 元；

（2）累计购物超过 50 元而不超过 100 元；

（3）累计购物超过 100 元．

解： 设累计购物花费 x 元．

（1）当累计购物不超过 50 元，即 $x\leqslant 50$ 时，在甲、乙两超市购物都不享受优惠，而两家超市以同样价格出售同样的商品，因此到两超市购物花费相同．

（2）当累计购物超过 50 元而不超过 100 元，即 $50<x\leqslant 100$ 时，在甲超市购物不享受优惠，但在乙超市购物能享受优惠，因此到乙超市购物花费较少．

（3）当累计购物超过 100 元，即 $x>100$ 时，在甲、乙两超市购物都能享受优惠．

① 若到甲超市购物花费较少，则

$$100+0.9(x-100)<50+0.95(x-50).$$

解得

$$x>150.$$

即 $x>150$ 时，到甲超市购物花费较少．

② 若到乙超市购物花费较少，则

$$100+0.9(x-100)>50+0.95(x-50).$$

解得

$$x<150.$$

即 $100<x<150$ 时，到乙超市购物花费较少．

③ 若到两超市购物花费相同，则

$$100+0.9(x-100)=50+0.95(x-50).$$

解得

$$x=150.$$

即 $x=150$ 时，到甲、乙两超市购物花费相同．

答： 当累计购物花费不超过 50 元或等于 150 元时，到两家超市购物花费相同；当累计购物超过 50 元而不到 150 元时，到乙超市购物花费较少；当累计购物超过 150 元时，到甲超市购物花费较少．

练习

1. 学校打算购买某款笔记本和中性笔作为奖品，奖励给在绘画比赛中获奖的学生．笔记本的价格为 16 元/个，中性笔的价格为 4 元/支．如果学校一共要购买 100 件奖品，总费用不能超过 900 元，那么学校最多能买多少个笔记本？
2. 一家水果店花费 10 000 元购进了大樱桃和小樱桃各 200 kg，计划分别以 39 元/kg 和 29 元/kg 的价格销售，但大樱桃在运输中损耗了 20%．若小樱桃的售价不变，为了使获得的总利润不低于预期利润的 90%，大樱桃的售价至少要定为每千克多少元？

习题 11.2

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+5)>2(4x+3)$；　　(2) $10-4(x-4)\leqslant 2(x-1)$；

(3) $\dfrac{2x-4}{7}<\dfrac{x-5}{2}$；　　(4) $\dfrac{2x-1}{3}\leqslant\dfrac{3x-4}{6}$；

(5) $\dfrac{3y-1}{5}-2>\dfrac{y+1}{4}$；　　(6) $\dfrac{y+1}{6}-\dfrac{2y-5}{4}\geqslant 1$.

2. a 取什么值时，代数式 $\dfrac{4a+1}{6}$ 表示下列数？

(1) 正数；　　(2) 小于 -2 的数；　　(3) 0.

3. 下列解不等式的过程是否正确？如果不正确，请加以改正．

(1) $-3x+2\geqslant -4$；

解：移项，得 $-3x\geqslant -6$.

两边都除以 -3，得 $x\geqslant 2$.

(2) $x-4<2x+1$.

解：移项，得 $-4-1<2x-x$.

合并同类项，得 $-5<x$.

即 $x<-5$.

4. 求满足下列条件的正整数 x 的值：

(1) $x+2<6$； (2) $2x+5<10$；

(3) $\frac{x-3}{2} \geqslant \frac{2x-5}{3}$； (4) $\frac{2+x}{2} \geqslant \frac{2x-1}{3}-2$.

综合运用

5. 长跑比赛中，刘伟跑在前面，在离终点 100 m 时，他以 6.5 m/s 的速度向终点冲刺．在他身后 10 m 的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在刘伟之前到达终点？

6. 电脑专营店销售一批笔记本电脑，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，以 5 000 元/台的价格将这批笔记本电脑全部售出，销售款总额超过 55 万元．这批笔记本电脑至少有多少台？

7. 一批苹果的进价是 8.55 元/kg，销售中估计有 5%的苹果正常损耗．商家把售价至少定为多少，才能避免亏本？

8. 一条食品包装生产线完成智能化升级后，每个月生产的无菌纸盒包装饮料的数量是原来月均产量的 1.7 倍．升级后，这条生产线 8 个月生产的无菌纸盒包装饮料的数量比原来 12 个月的生产量至少多 1 000 万盒，这条生产线原来平均每月的产量至少是多少万盒？

拓广探索

9. 分别求出不等式 $5x-1>3(x+1)$ 与 $\frac{1}{2}x-1<7-\frac{3}{2}x$ 的解集，并尝试确定它们的公共部分.

10. 某校七年级 560 名学生和 11 位老师准备乘坐客车去参观历史博物馆．客运公司有两种型号的客车可供租用，每辆车的载客量和租金如下表所示.

车型	A 型	B 型
载客量/人	40	56
租金/元	1 000	1 200

学校计划租用 11 辆客车，那么

(1) 最多可以租用多少辆 A 型客车？

(2) 共有几种租车方案？哪种方案的租金最低？

11.3 一元一次不等式组

一个不等式可以表示一个不等关系，当一个问题中含有多个不等关系时，怎样用不等式表示并求解呢？

问题 某工程队用每小时可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t，求将污水抽完所用时间的范围.

设用 x h 将污水抽完，则 x 同时满足不等式

$$30x>1\,200, \qquad ①$$

$$30x<1\,500. \qquad ②$$

类似于方程组，把这两个含有同一个未知数的一元一次不等式合起来，组成一个**一元一次不等式组**（system of linear inequalities with one unknown），记作

$$\begin{cases}30x>1\,200,\\30x<1\,500.\end{cases}$$

怎样确定不等式组中 x 的取值范围呢？

类似方程组的解，不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 的取值范围.

由不等式①，解得

$$x>40.$$

由不等式②，解得

$$x<50.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来，就容易看出不等式①和②的解集的公共部分（图 11.3-1）.

利用数轴体会：不等式组中 x 的取值范围是两个不等式解集的公共部分.

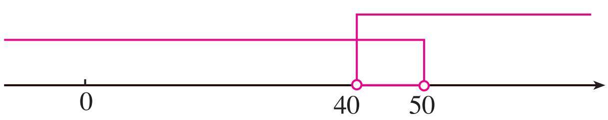


图 11.3-1

所以不等式组中 x 的取值范围是

$$40<x<50.$$

这就是说，将污水抽完所用时间多于 40 h 而少于 50 h.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫作由它们所组成的不等式组的**解集**. 解不等式组就是求它的解集. 例如，不等式组$\begin{cases}30x>1\ 200,\\30x<1\ 500\end{cases}$的解集是 $40<x<50$.

例 1 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x-1>x+1, & ①\\x+8<4x-1; & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+3\geqslant x+11, & ①\\\dfrac{2x+5}{3}-1<2-x. & ②\end{cases}$

解：(1) 解不等式①，得

$$x>2.$$

解不等式②，得

$$x>3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来，就可以找出两个不等式解集的公共部分（图 11.3-2）.

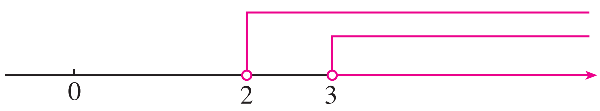


图 11.3-2

利用数轴可以直观地确定不等式组的解集.

所以不等式组的解集为

$$x>3.$$

(2) 解不等式①，得

$$x\geqslant 8.$$

解不等式②，得

$$x<\frac{4}{5}.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来，就可以看到这两个不等式的解集没有公共部分（图 11.3-3）.

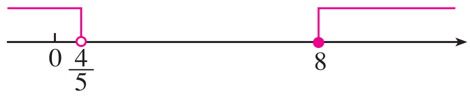


图 11.3-3

所以不等式组无解.

例 2　x 取哪些整数值时，不等式 $5x+2>3(x-1)$ 与 $\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x$ 都成立?

分析：使两个不等式都成立的 x 的值，就是两个不等式的公共解，因此求出由这两个不等式组成的不等式组的解集，解集中的整数就是 x 可取的整数值.

解：解不等式组

$$\begin{cases}5x+2>3(x-1),\\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x,\end{cases}$$

得

$$-\frac{5}{2}<x\leqslant 4.$$

所以 x 可取的整数值是 -2，-1，0，1，2，3，4.

归纳

解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分. 利用数轴可以直观地确定不等式组的解集.

练习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x>1-x,\\ x+2<4x-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-5>1+2x,\\ 3x+2\leqslant 4x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{2}{3}x+5>1-x,\\ x-1\leqslant \frac{3}{4}x-\frac{1}{8}.\end{cases}$

2. x 取哪些整数值时，不等式 $x+3>6$ 与 $2x-1<10$ 都成立?

习题 11.3

复习巩固

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1<3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1>3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1<3. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1\leqslant 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3(x-1)+13<5x-2(5-x), \\ 5-(2x+1)>3-6x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant 4, \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+4)<2, \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

综合运用

3. x 取哪些整数值时，不等式$4(x-0.3)<0.5x+5.8$ 与 $3+x>\dfrac{1}{2}x+1$ 都成立？

4. x 取哪些整数值时，$2\leqslant 3x-7<8$ 成立？

拓广探索

5. 把一些书分给几名同学，如果每人分 3 本，那么剩余 8 本；如果前面的每名同学分 5 本，那么最后一人分到了书但不到 3 本．这些书有多少本？共有多少名同学？

数学活动

活动1　用不等式解决实际问题

统计资料表明，2017 年某地区的城市建成区面积为 986.35 km^2，城市建成区绿地面积为 341.32 km^2，城市建成区绿地率为 34.6%. 2022 年这个地区的城市建成区面积比 2017 年增加了约 208 km^2，城市建成区绿地率超过了 40%.

根据上述资料，试用一元一次不等式解决下面的问题：

2017—2022 年，这个地区增加的城市建成区绿地面积超过了多少平方千米？

通过报刊、图书、网络等再收集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题. 看一看能不能用一元一次不等式解决这些问题.

活动2　猜猜哪个数最大

在数学游艺会上，张华负责一个游戏项目，她准备了 50 张同样的卡片，上面分别写有 1，2，3，…，49，50.

游戏规则是：将卡片顺序打乱，参与者从中随机抽取五张，并将它们正面向下放置在桌上（图 1）. 这五张卡片分别记为 A，B，C，D，E. 张华依次将相邻两张卡片上的数的和告诉参与者，请参与者猜出其中哪张卡片上的数最大.

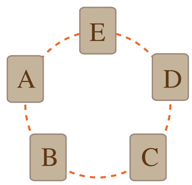


图 1

下表是李明抽取的五张卡片中相邻两张卡片上的数的和.

卡片编号	A，B	B，C	C，D	D，E	E，A
两数的和	54	66	59	71	48

李明经过思考，说出答案：“B 卡片上的数最大.”

张华说：“答对了！”

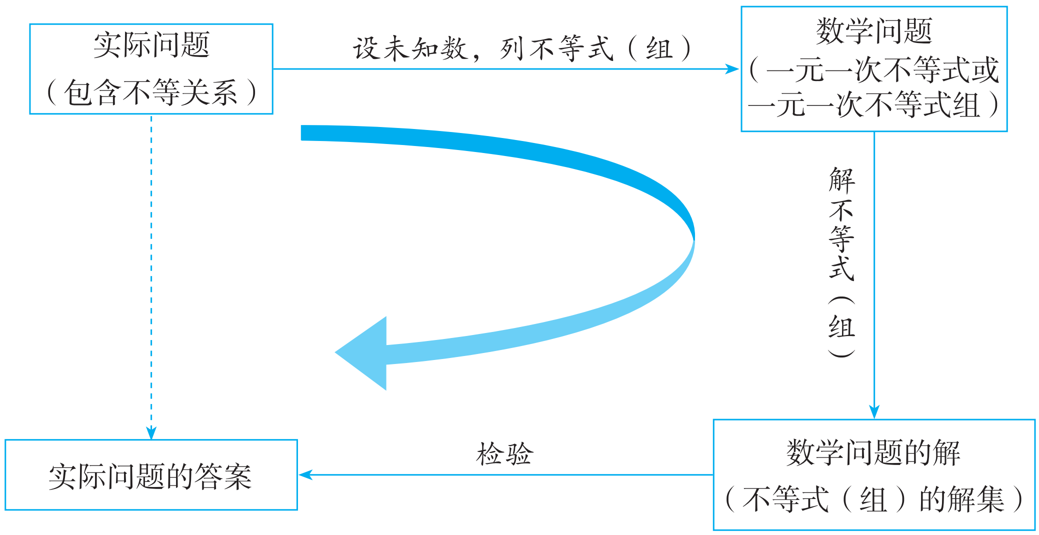
李明又说：“我还知道，如果按照卡片上的数从小到大的排序来排列这些卡片，那么顺序是 A，C，D，E，B.”

张华惊讶地说：“你说对了！你是怎么猜出来的？”

试试和同学一起玩这个游戏，想一想李明是用什么办法找到答案的.

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

不等式（组）是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用．本章我们主要学习了不等式的基础知识以及一类最简单的不等式（组）——一元一次不等式（组），并运用不等式解决了一些简单的实际问题．

本章的许多内容都可以和等式、方程类比．等式、不等式都能够表示问题中的数量关系，等式表示相等关系，不等式则表示不等关系；不等式具有与等式类似的性质；解方程需要依据等式的性质，解不等式则需要依据不等式的性质；解一元一次方程是将方程逐步化为 $x=m$ 的形式，解一元一次不等式则是将不等式逐步化为 $x<m$（$x\leqslant m$）或 $x>m$（$x\geqslant m$）的形式，两者都运用了化归的思想，解一元一次不等式的过程也与解一元一次方程类似．类比地学习，有利于对知识的理解和掌握．通过解不等式（组），你的运算能力也得到了进一步提升．

用不等式解决实际问题也与方程类似：首先要分析问题中的数量关系，找出不等关系，通过设未知数、列不等式，把实际问题转化为数学问

题；然后通过解不等式获得数学结论；最后讨论数学结论是否符合实际意义，并用数学结论解释实际问题．这也体现了建立数学模型解决实际问题的一般过程，有助于培养模型观念和应用意识．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．总结不等式的性质，并与等式的性质进行比较．

2．总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较．结合具体例子说明：解未知数为 x 的不等式，就是依据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<m$（$x\leqslant m$）或 $x>m$（$x\geqslant m$）的形式．

3．如何解一元一次不等式组？结合具体例子说明：解不等式组就是求相关不等式的解集的公共部分．

4．举例说明数轴在解不等式（组）中的作用．

5．结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程．

复习题 11

复习巩固

1．解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

（1）$3(2x+7)>23$；　　（2）$12-4(3x-1)\leqslant 2(2x-16)$；

（3）$\dfrac{x+3}{5}<\dfrac{2x-5}{3}-1$；　　（4）$\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-1}{2}\geqslant\dfrac{5}{12}$．

2．a 取什么值时，$15-7a$ 的值满足下列条件？

（1）大于 1；　　（2）小于 1；　　（3）等于 1．

3．解下列不等式组：

（1）$\begin{cases}2x+1>-1,\\2x+1<3;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9>3;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),\\5-(2x-1)<-6x;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}-3(x-2)\geqslant 4-x,\\\dfrac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

4．$\dfrac{x+3}{5}$ 的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由．

5．若 a 是一个实数，比较 a 与 $2a$ 的大小．

人民教育出版社

综合运用

6. 某运动员 5 000 m 长跑的个人最好成绩为 16 min 45 s. 在一次 5 000 m 长跑比赛中，他跑完前 3 000 m 用时 10 min 30 s. 如果这名运动员希望在本次比赛中获得的成绩不低于自己的个人最好成绩，那么在剩下的路程中，他的平均速度至少要为多少？

7. 在装修施工过程中，两位施工人员要用一辆手推车将一批瓷砖用电梯运送上楼. 电梯额定载重量为 1 050 kg，他俩的体重分别为 70 kg 和 75 kg，手推车的质量为21 kg，一箱瓷砖的质量约为 51 kg，那么他俩用电梯一次最多能将多少箱瓷砖运送上楼？

8. 在一场篮球比赛中，某队罚篮得分为 10 分，投进 2 分球和 3 分球共 48 个. 如果这支球队在本场比赛中总得分超过 110 分，那么他们至少投进多少个 3 分球？

9. 某汽车销售公司计划购买并销售 A 型和 B 型两种型号的新能源汽车共 20 辆. 这两款汽车每辆车的进价和售价如下表所示.

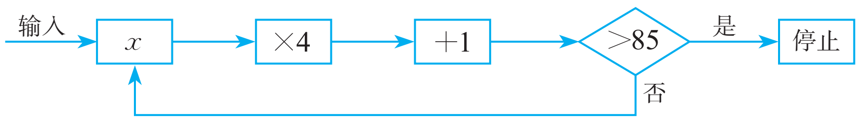
单位：万元/辆

类型	进价	售价
A 型	27	27.8
B 型	24.4	25.8

为了保证将这 20 辆车全部售出后，所得利润要超过 20.5 万元，那么这个公司最多能购买 A 型汽车多少辆？

拓广探索

10. 按照如下程序操作，规定：从“输入一个值 x”到“结果是否大于 85”为一次程序操作. 如果结果得到的数小于或等于 85，则用得到的这个数进行下一次操作.



(1) 如果程序操作进行一次就停止了，那么输入的 x 的取值范围是多少？

(2) 如果程序操作进行了两次才停止，那么输入的 x 的取值范围是多少？

11. 甲、乙两名同学各提一个水桶在同一个水龙头前打水. 如果甲打满一桶水需 a min，乙打满一桶水需 b min，那么谁先打水，能使两人都打满一桶水所用时间和（包含等待时间）较少？

综合与实践
低碳生活

全球气候正在变暖，科学家认为，这与大气中二氧化碳等温室气体的浓度变化有关. 2015 年，《巴黎协定》通过，这一协定要求各缔约方共同努力，把全球平均气温升幅控制在工业化前水平以上低于 2 ℃之内，并努力将气温升幅限制在工业化前水平以上 1.5 ℃之内. 2020 年，我国承诺，二氧化碳排放力争于 2030 年前“碳达峰”，2060 年前实现“碳中和”. 什么是“碳达峰”“碳中和”? 要实现我国“碳达峰”“碳中和”的目标，除了国家层面的规划和实施，我们每个人还能作出什么贡献呢? 我们该进行怎样的低碳生活呢?

活动目标

通过对“碳达峰”“碳中和”等相关知识的学习，以及对身边“碳足迹”计算的认识，建立低碳生活的理念，并设计自己的低碳生活行动方案.

活动准备

通过报刊、图书、网络等查阅、收集“碳中和”的相关资料.

活动任务

活动一　学习“碳中和”等相关知识

“碳中和”“碳交易”等是落实《巴黎协定》要求并促进各国低碳绿色发展活动的重要概念，要建立低碳生活的理念，需深入学习相关知识.

任务 1　分享交流

分享课前查阅的相关资料，对“碳中和”“碳交易”等相关概念，以及在当前国际、国内背景下二氧化碳减排发展情况等进行组内交流分享.

任务 2 问题探究

在我们生活的大气层中，二氧化碳虽然只约占大气体积的 0.03%，但其对气温有较大的影响.

根据此信息，你能提出哪些问题？你能解决其中的哪些问题？

活动二 计算生活中的“碳足迹”

每个人的日常消费都会产生二氧化碳（温室气体都可转化为二氧化碳当量计算）排放. 积极倡导并实践“低碳”生活是我们每一个人的社会责任.

任务 1 计算“碳足迹”

查阅、收集相关资料，计算你的家庭某月的“碳足迹”.

姓名		家庭人数	
家庭某月“碳足迹”计算			
序号	种类	某月消耗量	某月耗碳量/kg
1	家庭用电	kW·h	
2	水	t	
3	天然气	m^3	
4	液化气	kg	
5	汽油/柴油	L	
6	煤	kg	
7	鸡肉	kg	
8	牛肉	kg	
9	A4 纸	张	
10	塑料袋	个	
11	中途飞机 （200～1 000 km）	次	
12	长途飞机 （1 000 km 以上）	次	
…	……	……	

人民教育出版社

任务 2 根据完成的任务 1，你有哪些思考？请在组内分享交流.

活动三 认识、分析我国“碳达峰”“碳中和”目标

2021 年我国发布的《中国应对气候变化的政策与行动》白皮书指出，2020 年我国碳排放强度（单位国内生产总值二氧化碳排放）比 2015 年下降 18.8%，比 2005 年下降 48.4%，超额完成了我国向国际社会承诺的“到 2020 年下降 40%～45%”的目标，累计少排放二氧化碳约 58 亿吨，基本扭转了二氧化碳排放快速增长的局面. 与此同时，我国经济也实现跨越式发展. 2020 年，我国宣布自主贡献新目标举措：中国二氧化碳排放力争于 2030 年前达到峰值，到 2030 年，单位国内生产总值二氧化碳排放将比 2005 年下降 65%以上，努力争取 2060 年前实现“碳中和”.

任务 1 提出问题

根据以上材料，要实现我国“碳达峰”的目标，你能从碳排放强度、二氧化碳排放量、国内生产总值（GDP）等方面提出哪些数学问题？

任务 2 解决问题

在任务 1 提出的问题中，你能解决哪些问题？请给出解决方案.

任务 3 自主研究

根据你查阅得到的资料，你还能结合低碳生活提出一些数学问题吗？试解决你提出的问题.

活动四 设计低碳生活行动方案

任务 选择低碳生活是我们每个人的责任与义务，从身边做起，请设计你们小组的低碳生活行动方案.

活动过程

1. 组建合作团队

本次综合与实践活动需要团队协作. 在班级中组成 5～8 人一组的研究小组，每位同学参加其中一个小组，每个小组确定一名负责人.

2. 方案构思

小组成员进行充分的讨论与交流，集思广益，形成解决上述任务的方案.

3. 方案实施

按照小组设计的方案进行任务分工，使每位成员都有明确的任务. 根据规

划的研究步骤实施，完成活动任务，形成研究报告.

4. 展示交流

制作向全班汇报的演示文稿，选出代表向全班同学展示本组的研究成果，分享实践过程中的活动经验、遇到的困难及其解决方法，反思活动中的不足.

活动评价

通过成果展示与交流，基于各组完成的研究报告，根据情况选择任务完成表、表现评分表、自我反思表等进行评价. 与老师和全班同学一起，通过质疑、辩论、评价，总结成果，分享体会，分析不足，开展自我评价、同学评价和教师评价，完成本次综合与实践活动.

第十二章
数据的收集、整理与描述

在现实生活中，我们经常会遇到各种各样的统计数据．例如，从 2013 年到 2022 年，我国[1] GDP 从 59 万亿元增长到 121 万亿元；2022 年 6 月北京市的平均气温为 25.7 ℃；育人中学七年级学生每星期校外体育锻炼的平均时间约为 5.2 h；等等．这些数据可以帮助人们了解周围世界的现状和变化规律，从而为人们决策提供依据．你知道它们是如何获得的吗？你知道如何选择合适的统计图表描述它们吗？

统计学（statistics）是一门通过数据来研究问题和解决问题的科学，它能帮助我们回答上面的问题．在本章中，我们将在小学所学统计知识的基础上，学习收集数据的一些基本方法，在此基础上进一步学习如何整理数据，并用统计图表直观形象地描述数据，从中发现数据蕴含的规律，获取我们需要的信息．

[1] 今后如果不作特殊说明，本套书中涉及的有关全国统计数据涵盖的地域范围为全国 31 个省（自治区、直辖市），未包括我国台湾省、香港特别行政区和澳门特别行政区．

12.1 统计调查

统计的研究对象是数据．面对一个统计问题，首要的任务是收集数据，统计调查是收集数据的常用方法．

12.1.1 全面调查

问题 1 如果要了解全班同学对文学、科技、体育、艺术、劳技五类课外活动的喜爱情况，你会怎么做？

为解决问题 1，需要进行统计调查．

首先，可以通过问卷调查的方法收集数据，为此要设计调查问卷．

调查问卷

年　　月

在下面五类课外活动中，你最喜爱的是（　　）（单选）．

（A）文学　（B）科技　（C）体育

（D）艺术　（E）劳技

如果想了解男、女生喜爱课外活动的差异，问卷中还应该包含什么内容？

利用调查问卷，可以收集到全班每位同学最喜爱的课外活动的编号（字母），我们把它们称为数据．例如，某同学经过调查，收集到如下 50 个数据：

C　E　A　C　D　C　D　C　B　D

C　A　D　C　D　D　C　D　C　A

B　C　A　B　C　D　C　A　C　C

D　C　D　E　C　A　B　B　E　A

B　D　C　E　B　D　B　D　C　D

用字母代替活动的类型，可以方便统计．

从上面的数据中，你能看出全班同学对各类课外活动的喜爱情况吗？

杂乱无章的数据不利于发现其中的规律．为了更清楚地了解数据所蕴含的规律，需要对数据进行整理．统计中经常用表格整理数据，对前面 50 个数据的整理如表 12.1-1 所示．

表 12.1-1　全班同学最喜爱的课外活动的人数统计表

课外活动类型	划记	人数	百分比
文学（A）	正丅	7	14%
科技（B）	正下	8	16%
体育（C）	正正正丅	17	34%
艺术（D）	正正止	14	28%
劳技（E）	止	4	8%
合计		50	100%

在表 12.1-1 中，用划记法记录数据时，“正”字的每一划（笔画）代表一位同学. 例如，编号为 A 的课外活动对应的人数是 7，记为“正丅”.

表 12.1-1 可以清楚地反映全班同学喜爱各类课外活动的情况. 例如，最喜爱文学类课外活动的同学有 7 人，占全班人数的 14%；最喜爱科技类课外活动的同学有 8 人，占全班人数的 16%；等等.

为了更直观地表示表 12.1-1 中的信息，还可以用条形图（图 12.1-1）和扇形图（图 12.1-2）来描述数据.

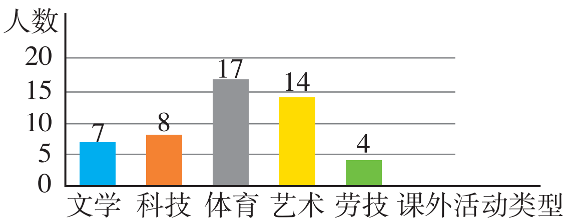


图 12.1-1

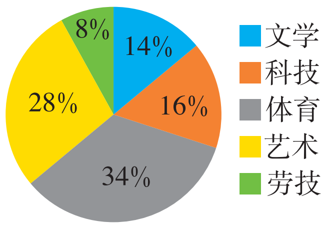


图 12.1-2

你能根据表 12.1-1、图 12.1-1 和图 12.1-2，说一说全班同学对五类课外活动的喜爱情况吗？

在上面的调查中，我们利用调查问卷得到全班同学喜爱课外活动的数据，利用表格整理数据，并用统计图对数据进行直观形象的描述. 通过分析这些表和图，了解全班同学喜爱课外活动的情况. 在这个调查中，全班同学是要考察的全体对象，我们对全体对象都进行了调查. 像这样考察全体对象的调查叫作**全面调查**. 例如，2020 年我国进行的第七次全国人口普查，就是一次全面调查. 普查结果显示，我国人口（包括现役军人、香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾地区的人口）共约 144 350 万人.

在上面的调查中，全班同学是要考察的全体对象，称为**总体**，组成总体的

每一名同学称为**个体**. 为了强调调查目的，有时也把全班每一名同学喜爱的课外活动类型的全体作为总体，每一名同学喜爱的课外活动类型作为个体.

练习

1. 下列调查问题设计得合理吗？为什么？

(1) 你每天睡眠充足吗？

(2) 你们学校的环境噪声是否在 55 dB 以下？

(3) 大多数同学认为学校操场应该铺设塑胶跑道，你同意吗？

2. 下列调查问题的答案的选项设计得合理吗？如果不合理，如何修改？

(1) 你对学校食堂的午餐满意吗？(　)

(A) 非常满意　(B) 满意　(C) 一般　(D) 不满意

(2) 你平时最喜欢的一项课外活动是 (　).

(A) 读课外书　(B) 体育活动　(C) 看电视　(D) 踢足球

3. 举出一些生活中运用全面调查的例子.

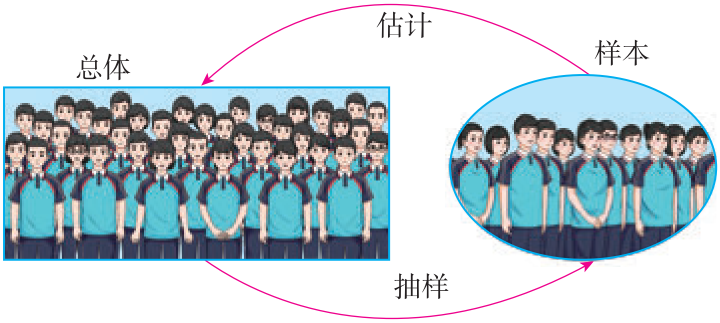
12.1.2　抽样调查

全面调查需要对调查对象的全体进行调查，能否通过调查一部分对象了解调查对象的整体情况呢？

问题 2　育人中学有 2 000 名学生，要想了解全校学生对文学、科技、体育、艺术和劳技五类课外活动的喜爱情况，应该怎样进行调查？

可以用全面调查的方法对全校学生逐个进行调查，然后整理收集到的数据，统计出全校学生对五类课外活动的喜爱情况. 但是，育人中学的学生比较多，全面调查花费的时间长，消耗的人力、物力大. 因此，需要寻找一种不作全面调查就能了解全校学生喜爱各类课外活动情况的方法，达到既省时省力又能解决问题的目的. 这就是我们要讨论的抽样调查.

抽样调查 (sampling survey) 是这样一种方法，它只抽取一部分对象进行调查，然后根据调查数据推断全体对象的情况. 例如，在问题 2 中，我们可以只抽取一部分学生进行调查，然后通过分析被调查学生的数据来推断全校学生对五类课外活动的喜爱情况. 全校学生是要考察的总体，而被抽取调查的那部分学生构成总体的一个**样本**.



那么，抽取多少名学生进行调查比较合适？被调查的学生又该如何抽取呢？

如果抽取调查的学生很少，样本就不容易具有代表性，也就不能客观地反映总体的情况；如果抽取调查的学生很多，虽然样本容易具有代表性，但花费的时间、精力也很多，达不到省时省力的目的. 因此抽取调查的学生数目要适当. 例如，问题 2 中可以抽取 100 名学生作为样本进行调查. 一个样本中包含的个体的数目称为样本容量，上述抽取的样本容量为 100.

想了解一锅八宝粥里各种成分的比例，只要搅拌均匀后，舀一勺查看，就能对整锅的情况估计个八九不离十. 这与抽取部分学生估计全校学生情况有什么相似之处？

为了使样本尽可能具有代表性，除抽取调查的学生数要合适外，抽取样本时，不能偏向某些学生，应使学校中的每一名学生都有相等的机会被抽到. 例如，上学时间在学校门口随机调查 100 名学生；在全校学生的学籍号中，随机抽取 100 个号码，调查这些号码对应的学生；等等.

你还能想出使每名学生都有相等机会被抽到的方法吗？

表 12.1-2 是李明同学抽取的样本容量为 100 的调查数据统计表.

表 12.1-2　抽样调查 100 名学生最喜爱课外活动的人数统计表

课外活动类型	划记	人数	百分比
文学（A）	正正下	13	13%
科技（B）	正正正下	18	18%
体育（C）	正正正正正正丁	32	32%
艺术（D）	正正正正正丁	27	27%
劳技（E）	正正	10	10%
合计		100	100%

人民教育出版社

从表 12.1-2 中可以看出，样本中最喜爱体育类课外活动的学生最多，所占百分比为 32%. 据此可以估计，这所学校的学生中，最喜爱体育类课外活动的学生最多，约占全校学生的 32%. 类似地，由表 12.1-2 可以估计育人中学最喜爱其他类课外活动的学生占全校学生的百分比，如图 12.1-3 所示.

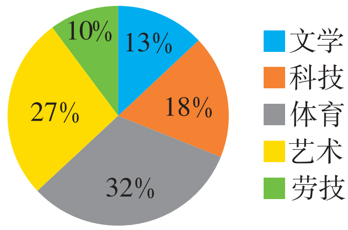


图 12.1-3

在上面抽取样本的过程中，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到，像这样的抽样方法称为**简单随机抽样**.

抽样调查是实际中经常采用的收集数据的方法. 除了具有花费少、省时省力的特点，它还适用于一些不宜用全面调查的情况，例如检测某批次灯泡的使用寿命等具有破坏性的调查. 需要注意的是，在抽样调查中，如果抽取样本的方法得当，一般样本能客观地反映总体的情况，抽样调查的结果会比较接近总体的情况，否则抽样调查的结果往往会偏离总体的情况.

归纳

全面调查和抽样调查是收集数据的两种方法. 全面调查收集到的数据全面、准确，但一般花费多、耗时长，而且某些调查不宜用全面调查. 抽样调查具有花费少、省时省力的特点，但抽取的样本是否具有代表性，直接关系到对总体估计的准确程度.

练习

1. 在一次试验中，为了估算 500 块大小相同的试验田中海水稻的产量，通过简单随机抽样的方法抽取了 50 块试验田进行测产. 指出这项抽样调查的总体、个体、样本和样本容量.
2. 为了解全校同学的平均身高，某同学调查了座位在自己旁边的 3 名同学，把他们身高的平均值作为全校同学平均身高的估计.

   (1) 这项调查是抽样调查吗?

   (2) 这项调查结果能较好地反映总体的情况吗? 如果不能，请说明理由.
3. 七年级 (1) 班要选 3 名同学代表全班参加班级之间的交流活动. 现在按下面的办法抽取:

把全班同学的姓名分别写在没有明显差别的小纸片上，把纸片混放在一个盒子里，充分搅拌后，随机抽取 3 张，按照纸片上所写的名字选取 3 名同学.

你觉得上面的抽取过程是简单随机抽样吗？为什么？

4. 在以下调查中，哪些适宜用全面调查，哪些适宜用抽样调查？

（1）了解全班同学的身高情况；

（2）调查超市售卖的草莓农药残留是否超标；

（3）选出学校短跑最快的学生参加全市比赛；

（4）调查某批次汽车的抗撞击能力.

请以小组为单位，合作解决下面的问题.

问题 3 比较你所在学校三个年级同学的平均体重：

（1）制订调查方案，并实施调查；

（2）根据收集到的数据，分析出每个年级同学的平均体重，并用折线图表示平均体重随年级增加的变化趋势；

（3）每组安排一位代表向全班介绍本组完成上述任务的情况，并进行比较和评议.

练习

1. 对全国人民作“你认同的低碳生活方式”的民意调查，下面是三名同学设计的调查方法：

同学甲：可以把要调查的问题放到访问量很大的网站上.

同学乙：可以在所住的小区门口随机调查一些居民.

同学丙：只要在班上调查一些同学就可以了.

上面三名同学能获得比较准确的民意调查结果吗？为什么？

2. 一名学生想了解全校同学的家庭用电量情况，调查了本校家住光明小区的 50 名同学的家庭月均用电量，并把这 50 个家庭月均用电量的平均数作为全校同学家庭月均用电量的平均数的估计值，你觉得合理吗？若不合理，请说明理由，并设计一个抽样调查的方案.

3. 你的脉搏是一分钟多少次？测量一下．你认为一次测量所得的数据能代表一般情况吗？为什么？请设计一个能够较准确地反映你脉搏的测量方案．

习题 12.1

复习巩固

1. 两名同学在作统计调查时，使用了下面两种提问方式，哪一种较好？为什么？

   （1）难道你不认为科幻片比纪录片更有意思吗？

   （2）你更喜欢哪一类电影，科幻片还是纪录片？

2. 要了解全校学生每周课余用于体育锻炼的时间，下列选取调查对象的方式中最合适的是（　　）．

   （A）随机选取一个班的学生　　（B）随机选取一个体育队的学生

   （C）在全校女生中随机选取 100 人　　（D）在全校学生中随机选取 100 人

3. 一家茶饮店为了选出最受顾客欢迎的饮料，在某个星期日对光顾本店的前 50 位顾客进行了调查．结果显示，超过一半的顾客都认为柠檬茶是自己最爱喝的饮料．这是否意味着大多数光顾这家店的顾客都最喜欢喝柠檬茶？为什么？

4. 下列调查中，哪些适宜用全面调查，哪些适宜用抽样调查？

   （1）了解全班同学每周课余用于阅读的平均时间；

   （2）调查市场上某品牌花生油的真菌毒素含量是否符合食品安全国家标准；

   （3）检测鞋厂生产的鞋底能承受的弯折次数；

   （4）调查某车间 20 名职工对安全生产知识的了解情况．

综合运用

5. 为了解全班同学的出生月份分布情况，需对全班同学进行调查，请设计调查问卷进行调查，并用表格整理数据．

6. 学校准备购买一批演出服，供学生活动时借用．七年级（1）班的同学随机调查了全校 40 名同学适合的演出服尺码，结果发现：穿 S 号的有 5 人，穿 M 号的有 16 人，穿 L 号的有 10 人，穿 XL 号的有 5 人，穿 XXL 号的有 4 人．根据调查结果，你认为七年级（1）班的同学会为学校购买服装提出什么建议？

7. 下表是 2021 年我国分地区国家级自然保护区的个数统计表.

地区	北京	天津	河北	山西	内蒙古	辽宁	吉林	黑龙江
个数	2	3	14	8	29	19	24	49
地区	上海	江苏	浙江	安徽	福建	江西	山东	河南
个数	2	3	11	8	17	16	7	13
地区	湖北	湖南	广东	广西	海南	重庆	四川	贵州
个数	22	23	15	23	10	7	32	11
地区	云南	西藏	陕西	甘肃	青海	宁夏	新疆	
个数	21	11	26	21	7	9	15	

请将表中各地区国家级自然保护区的个数（用 x 表示）按以下数据段进行分组，用表格统计各数据段中的地区个数，并说一说国家级自然保护区的分布情况.

$x<5$，$5\leqslant x<10$，$10\leqslant x<15$，$15\leqslant x<20$，$20\leqslant x<25$，$25\leqslant x<30$，

$30\leqslant x<35$，$35\leqslant x<40$，$40\leqslant x<45$，$45\leqslant x<50$.

8. 一家食品公司为调查新开发的一种点心的咸度是否适中，随机邀请了 36 人免费品尝并评分，结果如下：

C　C　C　B　A　D　B　C　C

D　C　C　A　B　D　C　E　C

E　C　C　A　B　E　C　B　C

C　B　C　C　C　B　C　D　C

A　太咸

B　稍咸

C　适中

D　稍淡

E　太淡

请用表格整理上面的数据，画出条形图，并推断大多数顾客将如何评价这种点心的咸度.

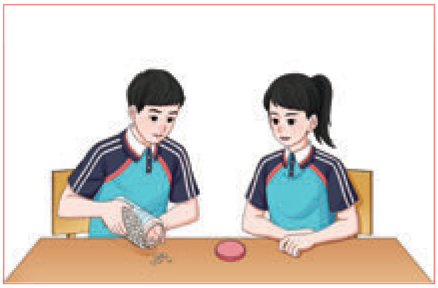
拓广探索

9. 为了解全校同学家庭丢弃不可降解塑料袋的情况，请制订调查方案，并实施调查. 根据调查结果，你能估计全校同学家庭一个月内丢弃不可降解塑料袋的情况吗?

探究与发现

瓶子中有多少粒豆子

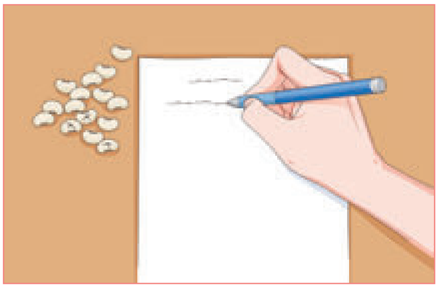
一个瓶子中装有一些豆子，如何估计这个瓶子中豆子的数目？请同学们通过小组合作完成下面的活动：



（1）从瓶子中取出一些豆子，记录这些豆子的粒数 m；

（2）给这些豆子做上记号；

（3）把这些豆子放回瓶子中，充分摇匀；



（4）从瓶子中再取出一些豆子，记录这些豆子的粒数 p 和其中带有记号的豆子的粒数 n；

（5）利用得到的数据 m，p，n，估计原来瓶子中豆子的粒数 $q\approx$________；

（6）数出瓶子中豆子的总数，验证你的估计．

上面的试验利用了抽样调查的方法．类似的试验在生产和科研中经常用到．例如，可以用这种方法估计一个养鱼池中鱼的数目．

首先从鱼池的不同地方捞出一些鱼，在这些鱼的身上做上记号，并记录捞出的鱼的数目 m，然后把鱼放回鱼池．过一段时间后，在同样的地方再捞出一些鱼，记录这些鱼的数目 p，数出其中带有记号的鱼的数目 n，把 $\frac{n}{p}$ 作为整个鱼池中带有记号的鱼在鱼的总数中所占的比值．这样就可以估计鱼池里鱼的数目 $q\approx\frac{p}{n}\times m$．

12.2 用统计图描述数据

对于收集到的统计数据，在对它们进行整理的基础上，往往需要根据问题的特点，选择合适的统计图描述数据，直观形象地反映数据的特征和其中蕴含的信息，从而解决相应的问题.

12.2.1 扇形图、条形图和折线图

在小学，我们学习过画条形图、折线图描述数据，并认识了扇形图. 在上一节中，我们通过扇形图直观描述了全班同学或全校同学喜爱各类课外活动的情况，你知道上一节中的扇形图是如何画出来的吗？

我们知道，扇形图用圆代表总体，每一个扇形代表总体中的一部分，通过扇形的大小反映各个部分占总体的百分比. 由于在一个圆内，扇形的大小由它的圆心角确定，因而只要根据各部分占总体的百分比求出圆心角的度数，就可以画出各部分对应的扇形.

例如，画图 12.1-3 的扇形图时，首先按各类课外活动所占的百分比，计算出对应扇形的圆心角度数，如“文学”对应扇形的圆心角为 $360^\circ\times13\%\approx47^\circ$. 同样可以计算出“科技”“体育”“艺术”“劳技”对应扇形的圆心角分别约为 65°，115°，97°，36°. 然后根据各圆心角的度数，在一个圆中画出各个扇形（图 12.2-1），并注明各类别的名称及其相应的百分比，便得到图 12.1-3 的扇形图.

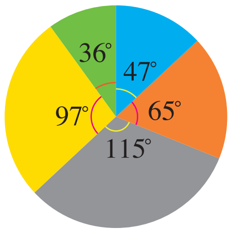


图 12.2-1

例 1 体重指数（BMI）是衡量人体胖瘦程度的常用指标（$\mathrm{BMI}=\dfrac{\text{体重}}{\text{身高}^2}$）. 某公司为了解员工的胖瘦状况，随机抽取了 60 名员工的体检数据，计算得到他们的体重指数数据（单位：$\mathrm{kg/m^2}$），如表 12.2-1 所示.

请选择合适的统计图，表示这个公司 60 名员工中各类别体重指数的员工人数和所占的百分比. 同时说一说从绘制的统计图中，能获得哪些信息.

表 12.2-1

25.2	17.9	22.2	23.3	29.0	21.4	18.0	19.2
21.0	17.5	18.9	22.9	27.2	21.2	18.8	18.3
20.7	16.7	18.4	17.5	22.3	22.1	24.1	20.0
34.6	17.4	21.2	22.5	26.1	21.5	20.8	19.4
20.8	17.5	18.8	22.6	27.0	19.1	24.4	23.8
21.7	22.1	19.5	23.7	23.7	21.4	19.7	19.3
23.4	29.1	23.2	27.6	23.8	23.9	23.5	31.0
18.4	23.9	23.4	31.0				

BMI（m）	分类
$m<18.5$	体重过低
$18.5\leqslant m<24.0$	体重正常
$24.0\leqslant m<28.0$	超重
$m\geqslant 28.0$	肥胖

分析： 可以先借助表格，统计各类别体重指数的员工人数和所占的百分比．为了清楚地表示各类别中的人数，可以绘制条形图；为了直观地表示各类别中的人数所占的百分比，可以绘制扇形图．

解： 根据表 12.2-1 中的数据，统计出这个公司 60 名员工的体重指数情况，如表 12.2-2 所示．

表 12.2-2

分类	划记	人数	百分比
体重过低	正正	10	16.7%
体重正常	正正正正正正正下	38	63.3%
超重	正丅	7	11.7%
肥胖	正	5	8.3%
合计		60	100%

分别画出条形图（图 12.2-2）和扇形图（图 12.2-3），表示这个公司各类别体重指数的员工人数和所占的百分比．

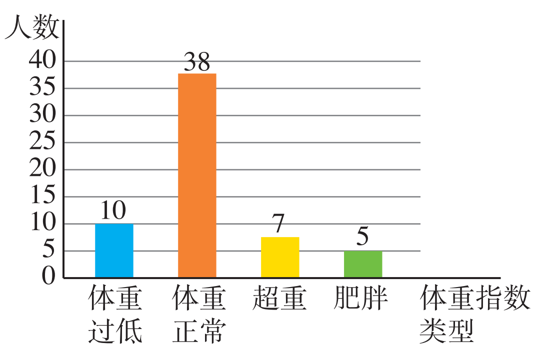


图 12.2-2

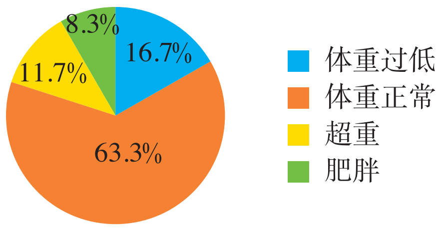


图 12.2-3

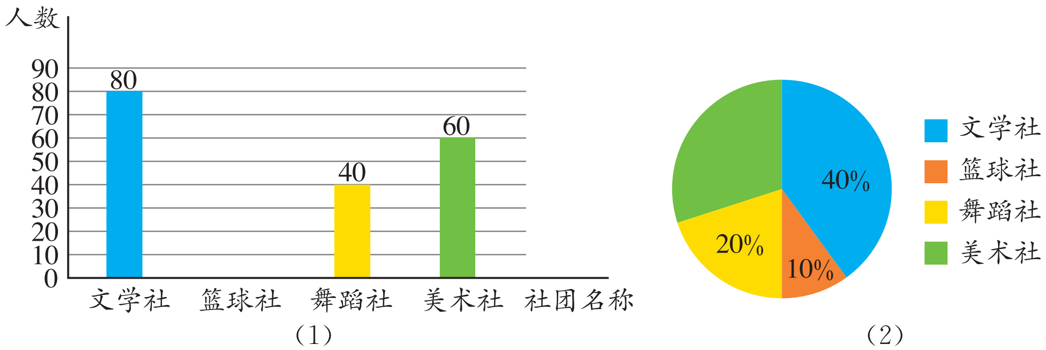
从图 12.2-2 和图 12.2-3 中可以看出，这个公司 60 名员工中体重正常的人数最多，有 38 人，所占百分比为 63.3%；体重过低的人数次之，有 10 人，所占百分比为 16.7%；超重的有 7 人，所占百分比为 11.7%；肥胖的人数最少，有 5 人，所占百分比为 8.3%.

从图 12.2-2 和图 12.2-3 中，你还能推断出这个公司员工胖瘦程度的什么信息?

由此可以推断这个公司员工的胖瘦状况. 例如，这个公司大多数员工的体重正常，但仍有大约 8%的员工肥胖，需要引起注意.

练习

1. 七年级的所有学生都参加了社团活动，因条件限制，每名学生都只能加入一个社团. 李明对全年级同学参加社团活动的情况进行了一次调查. 如图是根据李明的调查数据绘制的不完整的统计图，请根据图中信息，回答下列问题，并将统计图补充完整.



(第 1 题)

(1) 七年级共有多少名学生?

(2) 七年级有多少名学生参加篮球社?

(3) 七年级参加美术社的学生人数占全年级总人数的百分比是多少?

2. 某学校全体学生来自青山、绿水、向阳三个村庄，其人数比为 1∶2∶2.

(1) 如果有 20 人来自青山村，那么这所学校共有多少名学生?

(2) 用扇形图表示来自三个村庄的学生数所占的百分比.

3. 张华家下个月各项消费支出的预算额如下表所示. 请选择合适的统计图，描述张华家下个月各项支出的预算额占总预算额的百分比.

类别	食品	住房贷款	教育	交通	衣着	医疗	生活用品及水、电费	其他
预算额/元	2 100	1 750	1 100	550	350	500	350	300

接下来，我们进一步学习用条形图和折线图描述数据.

例 2　表 12.2-3 是 2013—2022 年我国货物出口总额与进口总额的数据. 请选择合适的统计图，描述这十年我国货物进、出口总额的变化情况，并对它们进行比较.

表 12.2-3　2013—2022 年我国货物进、出口总额

年份	2013	2014	2015	2016	2017
货物出口总额/亿元	137 131	143 884	141 167	138 419	153 309
货物进口总额/亿元	121 038	120 358	104 336	104 967	124 790
年份	2018	2019	2020	2021	2022
货物出口总额/亿元	164 129	172 374	179 279	214 255	237 412
货物进口总额/亿元	140 881	143 254	142 936	173 159	180 600

分析： 折线图用折线的上升或下降表示数据的增减变化情况，有利于描述数据的发展趋势；条形图能直观地表示各个数据的大小，便于比较数据. 因此，可以绘制折线图或条形图描述这十年我国货物进、出口总额各自的变化情况. 而要比较货物出口总额和进口总额，则可以把它们表示在同一幅统计图中，绘制复合折线图或复合条形图.

解： 可以绘制复合折线图描述表 12.2-3 中的数据，如图 12.2-4 所示.

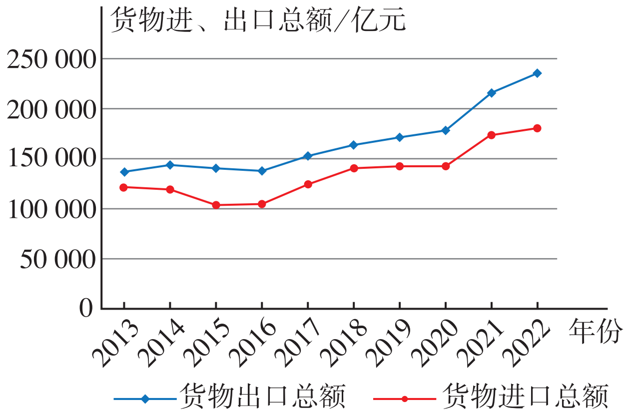


图 12.2-4

也可以绘制复合条形图描述表 12.2-3 中的数据，如图 12.2-5 所示.

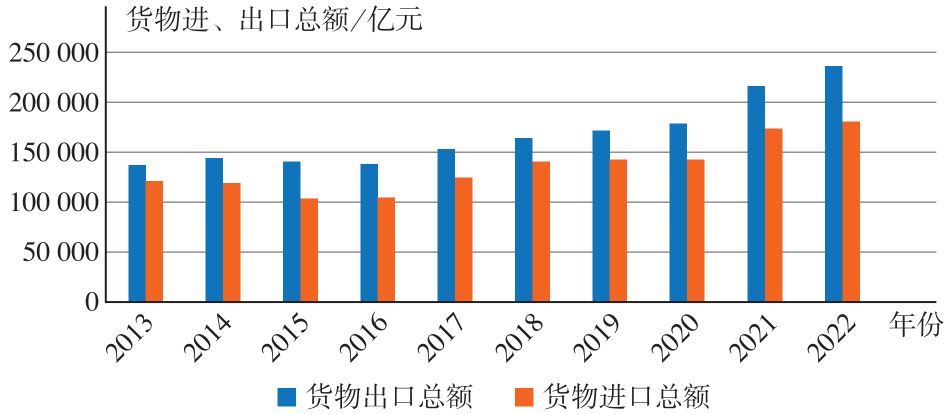


图 12.2-5

从图 12.2-4 或图 12.2-5 中可以看出，除 2014，2015，2016 年外，2013—2022 年这十年间，我国的货物出口总额与进口总额基本上都保持逐年增长的趋势，而且每年的出口总额都大于进口总额.

思考

比较扇形图、条形图和折线图，它们在描述数据方面各有什么特点？

练习

1. 我国可再生能源发展不断实现新突破. 下表是 2013—2022 年我国安装完毕并投入使用的风力和太阳能发电装机容量. 请选择合适的统计图表示这两组数据，并说一说从图中读到的信息.

年份	2013	2014	2015	2016	2017
风力发电/万千瓦	7 652	9 657	13 075	14 747	16 325
太阳能发电/万千瓦	1 589	2 486	4 218	7 631	12 942
年份	2018	2019	2020	2021	2022
风力发电/万千瓦	18 427	20 915	28 165	32 871	36 564
太阳能发电/万千瓦	17 433	20 418	25 356	30 654	39 268

2. 下表记录了 2016—2022 年我国九年义务教育巩固率、高中阶段毛入学率和高等教育毛入学率的情况. 请选择合适的统计图描述这三组数据，并说一说从图中读到的信息.

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
九年义务教育巩固率/%	93.4	93.8	94.2	94.8	95.2	95.4	95.5
高中阶段毛入学率/%	87.5	88.3	88.8	89.5	91.2	91.4	91.6
高等教育毛入学率/%	42.7	45.7	48.1	51.6	54.4	57.8	59.6

12.2.2 直方图

我们学习了条形图、扇形图和折线图等描述数据的统计图，下面介绍另一种常用来描述数据的统计图.

问题 1 为了举办运动会，学校准备从七年级学生中挑选身高接近的 40 人组成入场式仪仗队. 有 63 人报名参加选拔，他们的身高（单位：cm）数据如表 12.2-4 所示.

表 12.2-4

158	158	160	168	159	159	151	158	159
168	158	154	158	154	169	158	158	158
159	167	170	153	160	160	159	159	160
149	163	163	162	172	161	153	156	162
162	163	157	162	162	161	157	157	164
155	156	165	166	156	154	166	164	165
156	157	153	165	159	157	155	164	156

选择身高在哪个范围的学生参加呢?

为了使选取的仪仗队队员的身高看起来比较整齐，需要知道数据（身高）的分布情况，即在哪些身高范围的学生比较多，哪些身高范围的学生比较少. 为此，可以通过对这些数据适当分组来进行整理.

1. 计算最大值与最小值的差

在表 12.2-4 的数据中，最大值是 172，最小值是 149，最大值与最小值的差是 23，说明身高的变化范围是 23.

2. 决定组距和组数

把所有数据分成若干组，每个小组的两个端点间的距离（组内数据的取值

范围）称为组距. 根据问题的需要，各组的组距可以相同或不同. 在本问题中，我们作等距分组，即令各组的组距相同. 如果从最小值起每隔 3 作为一组，那么由于

$$\frac{最大值-最小值}{组距}=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3},$$

所以要将数据分成 8 组：$149\leqslant x<152$，$152\leqslant x<155$，…，$170\leqslant x<173$，其中 x 表示身高值. 这里组距和组数分别为 3 和 8.

组距和组数的确定没有固定的标准，要凭借经验和所研究的具体问题来决定. 将一批数据分组，一般数据越多，分的组数也越多. 当数据在 100 个以内时，按照数据的多少，常分成 5～12 组.

对于本节问题 1 中的数据，你能举出其他分组的例子吗？

3. 列频数分布表

对落在各个小组内的数据进行累计，得到各个小组内的数据的个数叫作**频数**. 整理可得下面的频数分布表：

表 12.2-5　频数分布表

身高分组	划记	频数	身高分组	划记	频数
$149\leqslant x<152$	丅	2	$164\leqslant x<167$	正下	8
$152\leqslant x<155$	正一	6	$167\leqslant x<170$	𠄎	4
$155\leqslant x<158$	正正丅	12	$170\leqslant x<173$	丅	2
$158\leqslant x<161$	正正正𠄎	19	合计		63
$161\leqslant x<164$	正正	10			

4. 画频数分布直方图

如图 12.2-6，为了更直观形象地看出频数分布的情况，可以根据表 12.2-5 画出频数分布**直方图**（histogram）.

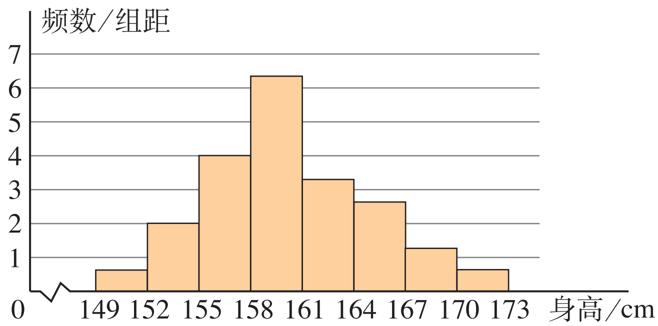


图 12.2-6

在图 12.2-6 中，横轴表示身高，纵轴表示频数与组距的比值. 容易看出，

$$小长方形面积=组距\times\frac{频数}{组距}=频数.$$

由此可见，频数分布直方图是以小长方形的面积来反映数据落在各个小组内的频数的大小，小长方形的高是频数与组距的比值.

等距分组时，各小长方形的面积（频数）与高的比是常数（组距）. 因此，画等距分组的频数分布直方图时，为画图与看图方便，通常直接用小长方形的高表示频数. 例如，图 12.2-6 表示的等距分组问题通常用图 12.2-7 的形式表示.

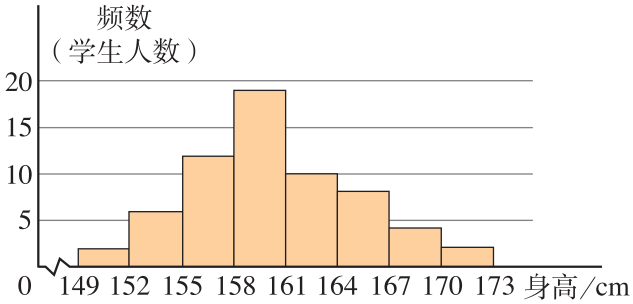


图 12.2-7

从表 12.2-5 和图 12.2-7 中可以看出，身高在 $155\leqslant x<158$，$158\leqslant x<161$，$161\leqslant x<164$ 三个组的人数最多，共有$12+19+10=41$（人）. 因此，可以从身高在 155 cm 至 164 cm（不含 164 cm）范围的学生中挑选仪仗队队员.

探究

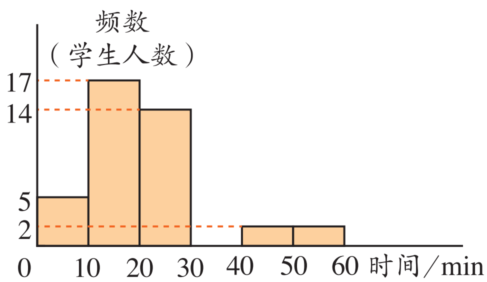
上面对数据进行分组时，组距取 3，把数据分成 8 组. 如果组距取 2 或 4，那么数据分成几个组？这样能否选出需要的 40 名学生呢？

练习

1. 如图反映了七年级（1）班全班同学从家到学校所需的平均时间，请根据直方图回答下列问题：

（1）七年级（1）班一共有多少名同学？

（2）从家到学校所需的平均时间在哪个范围的同学最多？哪个范围的同学最少？



（第 1 题）

(3) 你还能从图中获得什么信息?

2. 菲尔兹奖是国际上享有崇高声誉的数学奖项，每 4 年评选一次，主要授予为数学发展作出杰出贡献的年龄不超过 40 岁的年轻数学家. 下面是截至 2022 年菲尔兹奖得主获奖时的年龄：

29	39	35	33	39	28	33	35	31	31	37	32	38
36	31	39	32	38	37	34	29	34	38	32	35	36
33	29	32	35	36	37	39	38	40	38	37	39	38
34	33	40	36	36	37	40	31	38	38	40	40	37
35	40	39	37	30	40	34	36	36	39	35	37	

请根据下面不同的分组方法列出频数分布表，画出频数分布直方图，比较哪一种分组能更好地说明菲尔兹奖得主获奖时的年龄分布.

(1) 组距是 2，各组是 $28\leqslant x<30$，$30\leqslant x<32$，…；

(2) 组距是 5，各组是 $25\leqslant x<30$，$30\leqslant x<35$，…；

(3) 组距是 10，各组是 $20\leqslant x<30$，$30\leqslant x<40$，….

在工农业生产和科学试验中，也常用直方图描述数据的频数分布情况.

例 3 为了考察某种大麦穗长的分布情况，在一块试验田里抽取了 100 根麦穗，量得它们的长度（单位：cm）如表 12.2-6 所示.

表 12.2-6

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	4.6
5.8	5.5	6.0	6.5	5.1	6.5	5.3	5.9	5.5	5.8
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5
6.8	6.0	6.3	5.5	5.0	6.3	5.2	6.0	7.0	6.4
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4
6.0	5.4	6.5	6.0	6.8	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0
5.5	6.2	6.1	5.3	6.2	6.8	6.6	4.7	5.7	5.7
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0
6.3	5.7	6.8	6.1	4.5	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3

列出样本的频数分布表，画出频数分布直方图，并估计这种大麦穗长的分布情况.

解：(1) 计算最大值与最小值的差.

在样本数据中，最大值是 7.4，最小值是 4.0，它们的差是

$$7.4-4.0=3.4.$$

(2) 决定组距与组数.

在本例中，最大值与最小值的差是 3.4. 如果取组距为 0.3，那么由于

$$\frac{3.4}{0.3}=11\frac{1}{3},$$

所以可以分成 12 组，组数适合. 于是取组距为 0.3，组数为 12.

(3) 列频数分布表.

表 12.2-7

分组	划记	频数	分组	划记	频数
$4.0\leqslant x<4.3$	一	1	$6.1\leqslant x<6.4$	正正下	13
$4.3\leqslant x<4.6$	一	1	$6.4\leqslant x<6.7$	正正一	11
$4.6\leqslant x<4.9$	丅	2	$6.7\leqslant x<7.0$	正正	10
$4.9\leqslant x<5.2$	正	5	$7.0\leqslant x<7.3$	丅	2
$5.2\leqslant x<5.5$	正正一	11	$7.3\leqslant x<7.6$	一	1
$5.5\leqslant x<5.8$	正正正	15	合计		100
$5.8\leqslant x<6.1$	正正正正正下	28			

(4) 画频数分布直方图，如图 12.2-8 所示.

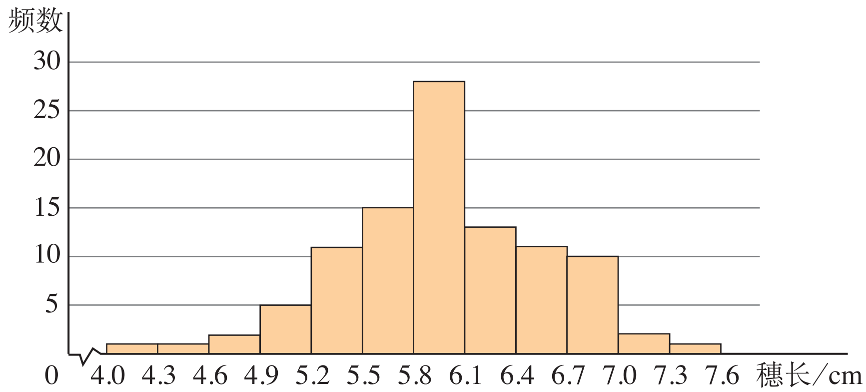


图 12.2-8

从表 12.2-7 和图 12.2-8 看到，麦穗长度大部分落在 5.2 cm 至 7.0 cm（不

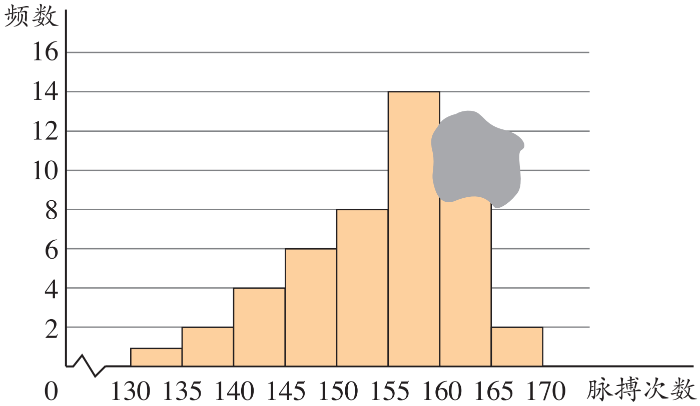
含 7.0 cm）的范围，落在其他范围的较少．长度在 $5.8 \leqslant x < 6.1$ 范围的麦穗根数最多，有 28 根，而长度在 $4.0 \leqslant x < 4.3$，$4.3 \leqslant x < 4.6$，$4.6 \leqslant x < 4.9$，$7.0 \leqslant x < 7.3$，$7.3 \leqslant x < 7.6$ 范围的麦穗根数很少，总共只有 7 根．由此可以估计这种大麦穗长主要分布在 5.2 cm 至 7.0 cm（不含 7.0 cm）的范围，其中穗长在 5.8 cm 至 6.1 cm（不含 6.1 cm）范围的大麦最多．

思考

比较条形图和直方图，它们在描述数据方面各有什么特点？

练习

1. 如图，为了解 800 m 赛跑后学生心率的分布情况，体育老师统计了全班 48 名学生 800 m 赛跑后一分钟的脉搏次数，并根据收集的数据画出了频数分布直方图．由于不小心，有一个小长方形被墨水盖住了．你能根据已有信息把直方图补全吗？



（第 1 题）

2. 下面是从蔬菜大棚中收集的 50 株番茄上的果实个数：

28	62	54	29	32	47	68	27	55	43
36	79	46	54	25	82	16	39	32	64
61	59	67	56	45	74	49	36	39	52
85	65	48	58	59	64	91	67	54	57
68	54	71	26	59	47	58	52	52	70

请按组距为 10 将数据分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图，并分析这 50 株番茄上果实个数分布的情况．

人民教育出版社

12.2.3 趋势图

前面，我们用折线图表示了与时间有关的量（如 2013—2022 年我国货物进、出口总额）的发展趋势. 在现实生活中，还经常需要研究更广泛的两个量之间的关系，如 GDP 随时间的变化趋势、学生体重与身高的关系、商品销售收入与广告支出的关系等，用什么统计图描述它们之间的关系呢?

问题 2 为了研究气温对冷饮销售的影响，一家饮品店经过一段时间的统计，得到一组卖出的冷饮杯数与当天最高气温的数据，如表 12.2-8 所示.

表 12.2-8

最高气温/℃	12	13	17	19	20	22	24	25	28
冷饮杯数	50	69	74	90	108	97	119	125	154

你能用统计图描述这家饮品店一天中卖出的冷饮杯数与当天的最高气温之间的关系吗?

由表 12.2-8 可以看出，随着最高气温的逐渐升高，饮品店卖出的冷饮杯数大致呈现逐渐上升的趋势. 为了更加清楚地看出冷饮杯数与最高气温之间的关系，如图 12.2-9，用横轴表示最高气温，用纵轴表示冷饮杯数，描出表 12.2-8 中各对值（12，50），（13，69），…，（28，154）所对应的点.

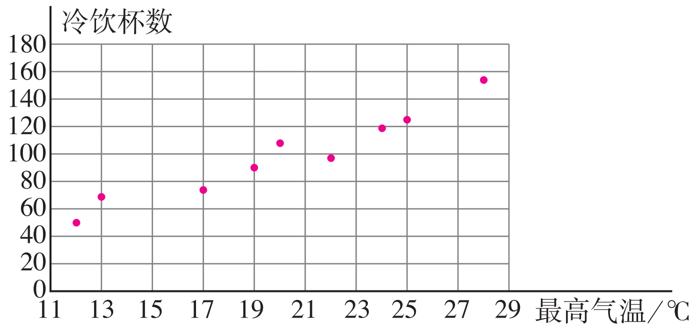


图 12.2-9

观察图 12.2-9 中散点的分布情况，可以发现，这些散点大致落在一条呈上升趋势的直线附近.

探究

如果用一条尽可能靠近所有散点的直线来表示一天卖出的冷饮杯数与当天最高气温之间的关系，你能试着在图 12.2-9 中画出这条直线吗?

如图 12.2-10，有的同学可能会画出这样一条直线，让它经过尽可能多的点.

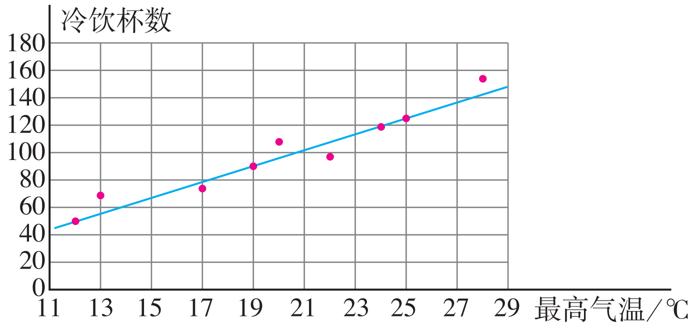


图 12.2-10

如图 12.2-11，有的同学可能会画出这样一条直线，让它两侧的点的个数大致相等.

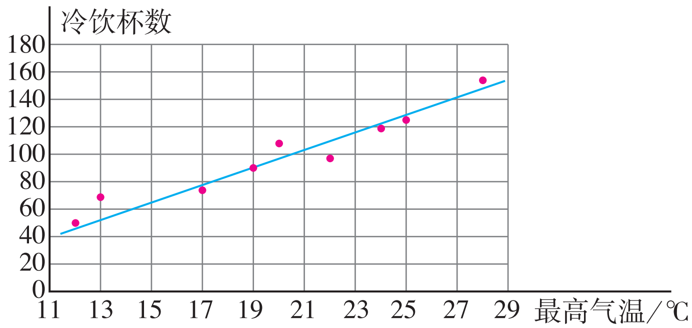


图 12.2-11

如图 12.2-12，有的同学可能会画出多条直线，然后测量各点到这些直线的距离和，选取距离和最小的直线作为所求的直线.

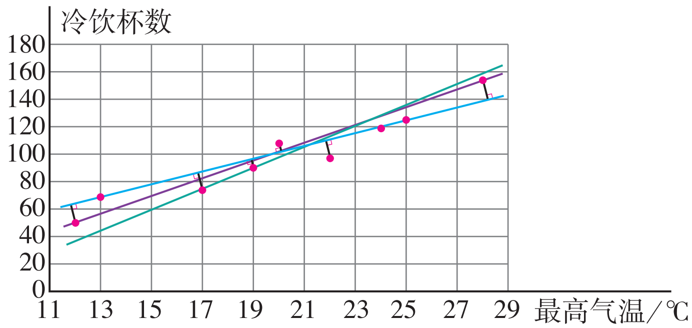


图 12.2-12

要画出“尽可能靠近所有散点的直线”，可以有很多种画法，上面的几种画法都有一定的道理. 到了高中，我们将学习计算“竖直距离”的平方和，当这个平方和最小时，可以求出一条直线来描述饮品店一天卖出的冷饮杯数与当

天最高气温之间的关系（图 12.2-13）.

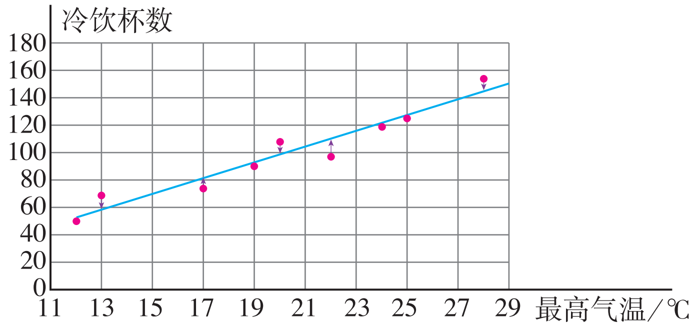


图 12.2-13

像上面这样，用一条线（直线或曲线）来描述一个量与另一个量之间关系的统计图，叫作**趋势图**（tendency chart）.

趋势图比较清楚地表示了两个量之间的关系，有利于根据一个量的变化，预测另一个量的变化趋势. 例如，根据图 12.2-13 中的趋势图，可以预测当一天的最高气温为 30℃ 时，饮品店卖出的冷饮约为 155 杯.

思考

结合具体问题，说一说趋势图在描述数据方面有什么特点.

练习

1. 下表记录了 8 位男生和他们的父亲的身高. 用趋势图描述儿子身高与父亲身高之间的关系，并根据你作的趋势图，估计当父亲身高为 175 cm 时儿子的身高.

父亲身高/cm	165	168	172	174	177	177	180	183
儿子身高/cm	168	169	174	177	176	178	181	182

2. 下表是 2016—2022 年我国地下水供水量的数据.

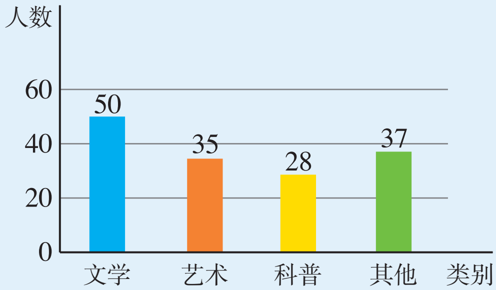
年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
地下水供水量/亿立方米	1 057	1 017	976	934	893	854	828

用趋势图描述这段时间我国地下水供水量的变化趋势，并预测 2023 年的地下水供水量. 查阅资料，看一看你的预测值与 2023 年的实际值相差多少.

习题 12.2

复习巩固

1. 学校准备购买一批课外读物．为使课外读物能够满足学生的需求，学校就“我最喜爱的课外读物类型”作了一次样本容量为 150 的抽样调查．如图是根据调查结果绘制的统计图．

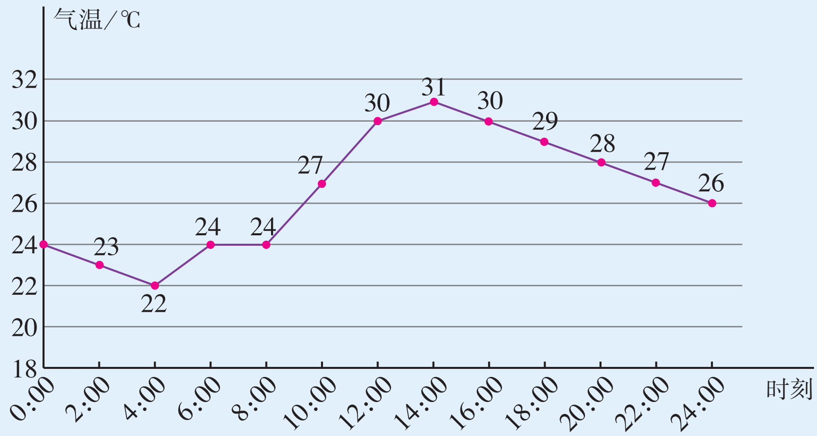


（第 1 题）

（1）绘制扇形图，表示样本中喜爱各类课外读物的学生所占的百分比；

（2）学校计划购买课外读物 4 500 册，根据样本数据，估计学校购买多少册科普类读物比较合理．

2. 下面的折线图描述了某地一天的气温变化情况．



（第 2 题）

（1）这一天的最高气温是多少？什么时刻达到最高气温？

（2）这一天的最低气温是多少？什么时刻达到最低气温？

（3）估计这一天 7 时、11 时、15 时和 19 时的气温．

（4）描述这一天气温的变化情况．

3. 下表记录了 2016—2022 年我国的汽车销量和新能源汽车销量.

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
汽车销量/万辆	2 802.8	2 887.9	2 808.1	2 576.9	2 531.1	2 627.5	2 686.4
新能源汽车销量/万辆	50.7	77.7	125.6	120.6	136.7	352.1	688.7

选择合适的统计图，描述这些年我国汽车销量和新能源汽车销量的变化情况，以及新能源汽车销量在汽车销量中的占比的变化趋势.

4. 体育委员统计了全班同学 60 秒跳绳的次数，并列出下面的频数分布表.

分组	$60\leqslant x<80$	$80\leqslant x<100$	$100\leqslant x<120$	$120\leqslant x<140$
频数	3	4	17	9
分组	$140\leqslant x<160$	$160\leqslant x<180$	$180\leqslant x<200$	
频数	8	6	1	

根据频数分布表回答下列问题：

（1）这个班有多少名同学？

（2）组距是多少？组数是多少？

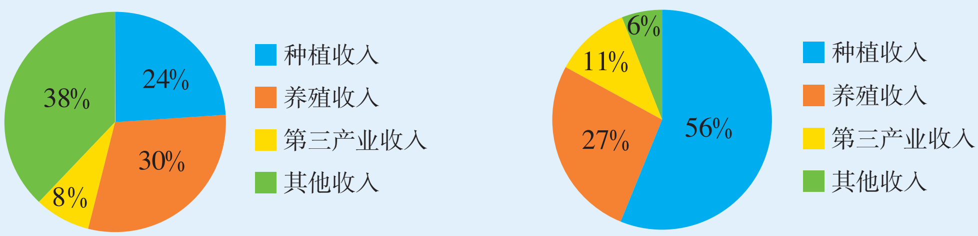
（3）跳绳次数在 $120\leqslant x<160$ 范围的同学有多少？占全班人数的百分之几？

（4）画出适当的统计图表示频数分布表中的信息.

（5）你怎样评价这个班的跳绳成绩？

综合运用

5. 绿水村经过五年的乡村振兴发展，年经济收入翻了两番. 五年前和现在，绿水村的年经济收入中“种植收入”“养殖收入”“第三产业收入”和“其他收入”的占比情况分别如图（1）（2）所示.



（1）五年前　　（2）现在

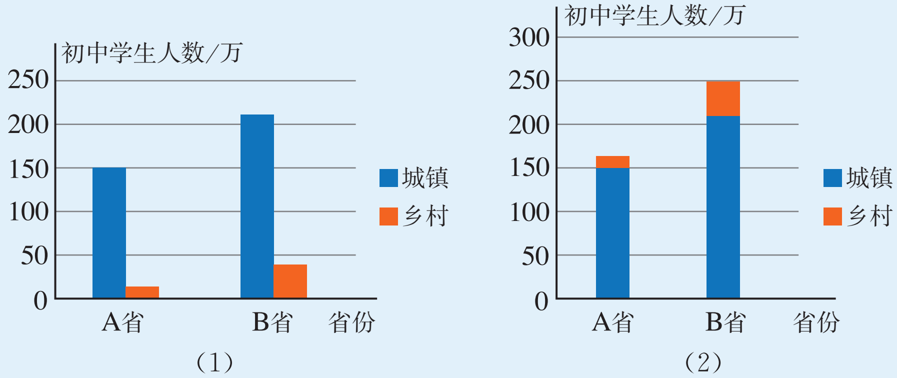
（第 5 题）

读图并回答下列问题：

（1）哪些项目的收入增长了，哪些项目的收入减少了，与五年前相比分别增长或减少了多少？

（2）按现在的趋势，什么产业可能成为绿水村的支柱产业（即年经济收入中占比最多的产业）？为什么？

6. 据统计，A，B 两省人口总数基本相同. 某年 A 省的城镇在校初中学生人数为 150 万，乡村在校初中学生人数为 13 万；B 省的城镇在校初中学生人数为 211 万，乡村在校初中学生人数为 40 万. 李明根据这些数据画出下面两种复合条形图.



（第 6 题）

（1）哪种图能更好地反映两省在校初中学生总人数？

（2）哪种图能更好地比较 A（或 B）省城镇与乡村在校初中学生人数？

（3）说一说这两种图的特点.

7. 一个面粉批发商统计了前 48 个星期的销售量（单位：t）：

24.4	19.1	22.7	20.4	21.0	21.6	22.8	20.9	21.8	18.6	24.3	20.5
19.7	23.5	21.6	19.8	20.3	22.4	20.2	22.3	21.9	22.3	21.4	19.2
23.5	20.5	22.1	22.7	23.2	21.7	21.1	23.1	23.4	23.3	21.0	24.1
18.5	21.5	24.4	22.6	21.0	20.0	20.7	21.5	19.8	19.1	19.1	22.4

将数据适当分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图，并分析这个面粉批发商每星期购进面粉多少吨比较合适.

8. 下表是 2013—2022 年我国的 GDP 数据. 用趋势图描述我国这段时间 GDP 的发展趋势，并根据作出的趋势图，预测我国 2023 年的 GDP 数值. 查阅资料，看一看你的预测值与 2023 年 GDP 的实际值相差多少.

年份	2013	2014	2015	2016	2017
GDP/亿元	592 963.2	643 563.1	688 858.2	746 395.1	832 035.9
年份	2018	2019	2020	2021	2022
GDP/亿元	919 281.1	986 515.2	1 013 567.0	1 149 237.0	1 210 207.2

拓广探索

9. 下表记录了 1995—2020 年每隔五年我国高新技术产品的出口额及其在当年商品出口贸易总额中所占的百分比. 请绘制合适的统计图表示我国高新技术产品出口贸易的发展趋势.

年份	1995	2000	2005	2010	2015	2020
高新技术产品出口额/亿美元	101	370	2 182	4 924	6 552	7 763
占商品出口贸易总额的百分比/%	6.8	14.8	28.6	31.2	28.8	30.0

10. 下表是 2022 年我国分地区城市绿地面积统计表.

地区	北京	天津	河北	山西
面积/hm^2	93 558	47 713	100 563	58 288
地区	内蒙古	辽宁	吉林	黑龙江
面积/hm^2	71 573	150 462	99 451	74 527
地区	上海	江苏	浙江	安徽
面积/hm^2	172 647	319 725	189 757	132 363
地区	福建	江西	山东	河南
面积/hm^2	91 088	80 560	280 650	135 170
地区	湖北	湖南	广东	广西
面积/hm^2	117 985	99 439	539 604	81 236
地区	海南	重庆	四川	贵州
面积/hm^2	19 683	76 584	143 459	100 487
地区	云南	西藏	陕西	甘肃
面积/hm^2	63 270	6 858	80 269	32 834
地区	青海	宁夏	新疆	
面积/hm^2	9 160	26 418	90 639	

根据上面提供的数据，分析 2022 年这些地区的城市绿地面积的分布情况.

人民教育出版社

信息技术应用

利用信息技术工具画统计图

利用信息技术工具画统计图不但快捷方便，而且画出的统计图标准、美观. 能画统计图的信息技术工具有专门的统计软件，如 R、SPSS、SAS 等；也有具有一定统计功能的软件，如电子表格、GeoGebra、网络画板等；还有图形计算器等.

下面以绘制图 12.2-6 中的直方图为例，简单介绍一下用某计算机软件画统计图的操作过程.

1. 输入数据

将表 12.2-4 中的数据输入，形成列表 l1.

2. 设置起点和组距

在输入栏输入命令“组限(l1, 149, d)”，其中数值 149 代表起点，d 代表组距，点击回车键，就创建了 d 的一个滑动条，同时在“代数区”会出现列表 l2. 这时右键点击滑动条，可在“属性”中设置 d 的变化范围和增量，如设置范围为 $1\leqslant d\leqslant 5$，增量为 0.5（图 1）.

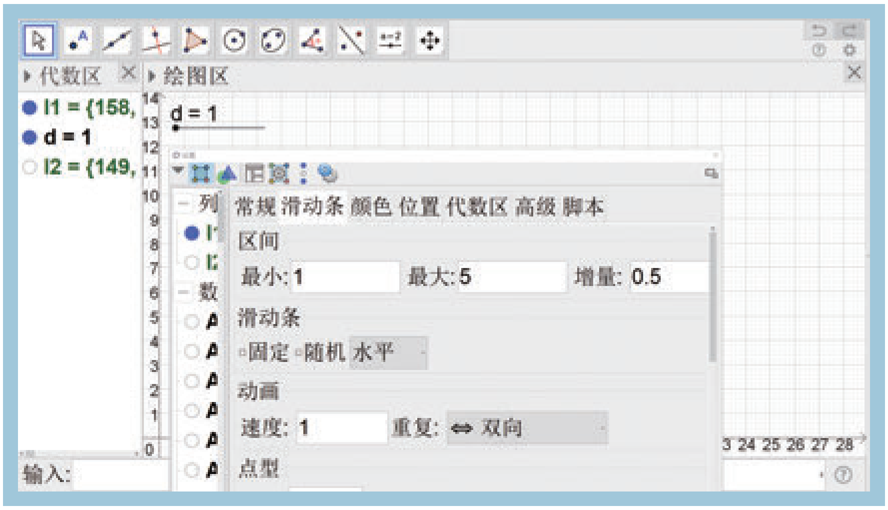


图 1

3. 画直方图

在输入栏输入命令“直方图(false, l2, l1, true)”，点击回车键，即可得到一个直方图.

4. 改变组距

拖动滑动条使 d=3，即可得到图 12.2-6 中的直方图（图 2）.

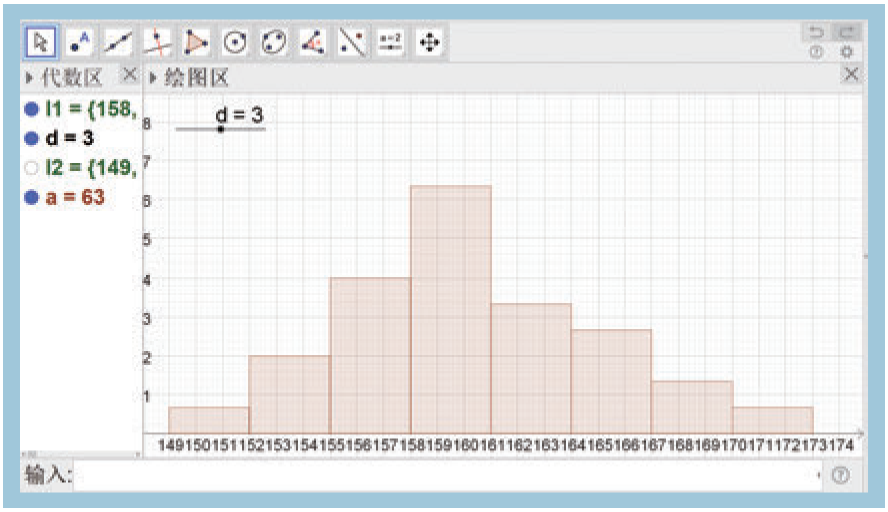
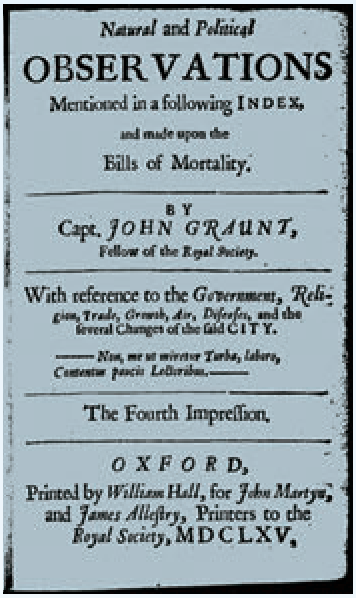


图 2

利用信息技术工具，不仅能画直方图，还可以画条形图、扇形图和折线图等其他类型的统计图. 请利用信息技术工具画出条形图 12.1-1 和扇形图 12.1-2.

注意：不同软件或同一软件的不同版本，其具体操作可能不同.

图说数学史


Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.
BY
Capt. JOHN GRAUNT,
Fellow of the Royal Society.
With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Air, Diseases, and the several Changes of the said CITY.
——Non, me ut miretur Turba, laboro,
Contentus paucis Lectoribus.——
The Fourth Impression,
OXFORD,
Printed by William Hall, for John Martyn, and James Allestry, Printers to the Royal Society, MDCLXV.

《关于死亡表的自然的和政治的考察》书影

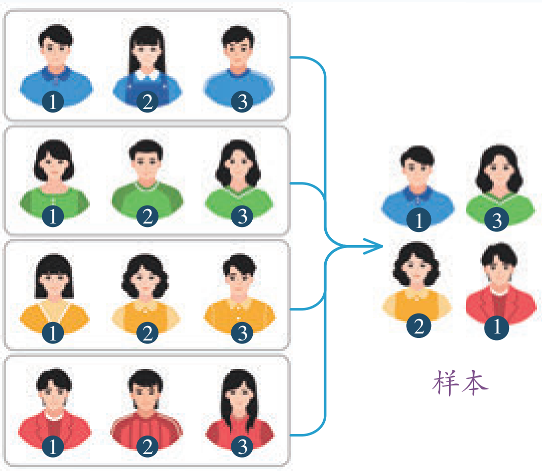
17 世纪，英国学者格兰特通过整理和分析有关死亡原因的公报中庞大的数据，对当时伦敦的人口问题作了一些论断，于 1662 年出版了《关于死亡表的自然的和政治的考察》，这对后世统计学发展有重大影响.

早期的数据收集与整理

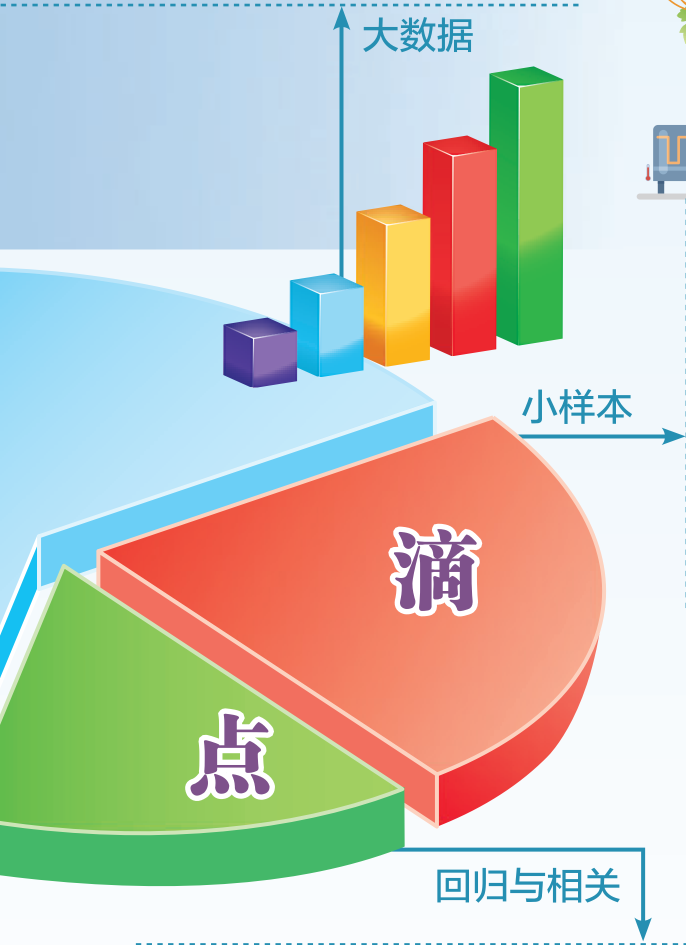
抽样调查

1894 年，统计学家凯尔在挪威作关于退休金和疾病保险金调查时，将人口按城市和乡村进行“分层”，然后在各层中按照比例抽取样本，这就是“代表性抽样”.

由部分推断整体就会产生误差，19 世纪的人们质疑抽样调查的可信性. 1906 年，统计学家鲍利系统地说明了如何测定抽样误差. 经过几十年的努力，抽样调查的方法最终被公众接受.



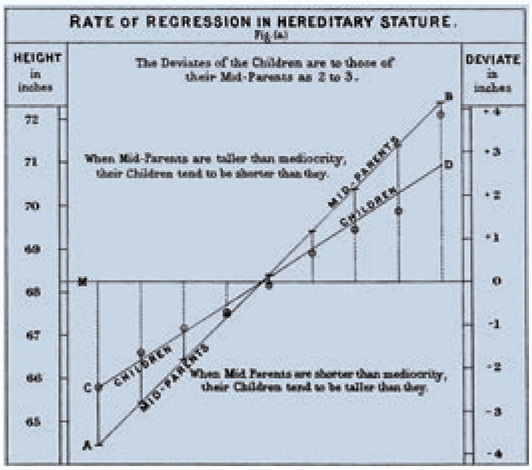
“大数据”正在改变世界，正在改变人们的思维模式和行为方式……如今，计算机的发展使需要大量计算的统计方法得以实现，统计学仍然在发展中……



1899年，酿酒师戈塞特为了研究原料及生产条件与啤酒质量的关系，需要分析酿酒过程中的数据．由此，他开启了一个全新的课题——人为试验下得到的少量数据的小样本统计问题．

随着小样本理论进一步完善和发展，统计分析研究的范围进一步扩大，统计学的发展也迈上了新台阶．

1870年，高尔顿开始用统计方法研究遗传学，例如，他发现子女的平均身高有向所有成年子女平均身高“回归”的倾向．相关研究促进统计学取得了突破性进展——回归和相关的发现和发展．这不仅提供了一种重要的统计方法，而且为20世纪统计方法的发展提供了契机．



选自高尔顿1886年发表的论文
《遗传身高向平均身高的回归》

数学活动

活动1　估计全班同学的平均身高

通过小组合作完成下列活动：

根据本班人数准备相同数量的小纸片，这些小纸片没有明显差别.

1. 调查并记录全班每名同学的身高，分别写在不同小纸片上，算出全班同学的平均身高，然后把所有的小纸片放在一个纸盒里.

2. 充分搅拌盒中的纸片，随机抽取出 15 张纸片作为一个样本，计算纸片上数字的平均值，将抽取的纸片放回纸盒.

3. 比较样本平均身高和全班平均身高，谈谈你对这个结果的看法.

4. 重复上述步骤 2 若干次，把每次求得的样本平均身高和全班平均身高作比较，你有什么发现？

活动2　谁的反应快

准备一把带刻度的直尺，和一位同学合作来测量反应速度.

第一步：伸出一只手，拇指和其余四指分开；

第二步：让同伴把直尺直立，刻度 0 在下方，拿到你的拇指和四指之间，使刻度 0 的位置与拇指在同一高度，然后松手，你要以最快的速度抓住直尺；

第三步：记录手抓在直尺上的刻度 l（单位：cm）；

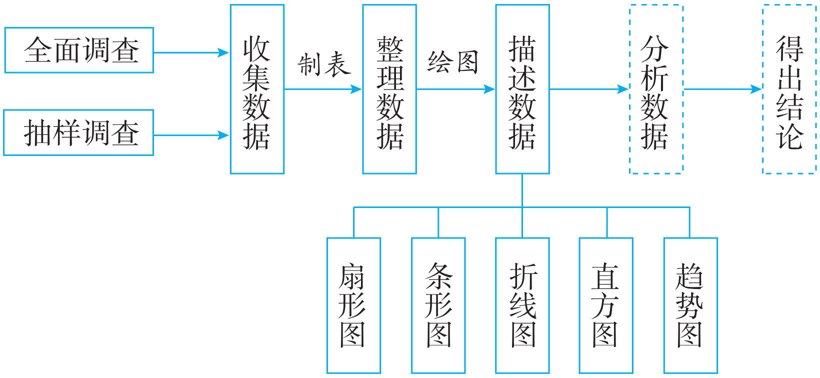
第四步：重复试验 10 次，记录并整理试验所得数据.

在 10 次试验中，所得 l 的最大值、最小值和平均值各是多少？l 的值与反应速度有什么关系？与你的同伴对调，并重复上面的过程，看谁的反应快.

人民教育出版社

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

为了更好地了解周围世界，经常需要有目的地收集一些数据，然后用统计图表整理和描述数据，发现数据中蕴含的信息，再根据现有信息作出合理推断和预测．这一过程不仅有助于具体问题的解决，也可以培养数据观念．

本章我们学习了两种收集数据的方法——全面调查和抽样调查．全面调查考察全体调查对象，抽样调查只考察部分调查对象．因为抽样调查是根据样本来推断总体，所以在设计抽样方案时，要注意样本对总体的代表性．简单随机抽样是一种基本且实用的抽样方法，它要求总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到．

利用统计图表等整理和描述数据，有利于发现和探索数据中蕴含的规律，获取数据中的信息．不同的统计图在描述数据时有不同的特点，应根据实际问题的需要选用合适的统计图描述数据．条形图、扇形图一般用来描述分类数据．条形图直观地显示了每个类别数据的大小，利用它容易比较各类别数据之间的差距；扇形图显示了每个类别数据占总数的百分比，利用它容易看出各类别数据相对总数的大小，以及各类别数据之间的相对大小．折线图常用于描述随时间变化的数据，它能够显示不同时刻

的数据，利用它容易看出数据随时间的变化趋势．直方图一般用来描述连续分组数据，通过对数据分组，显示数据取值的分布，利用它容易从整体上把握数据分布的特点．趋势图可以用来描述两个量之间的关系，利用它可以根据一个量的变化预测另一个量的变化趋势．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 什么是全面调查和抽样调查？它们各有什么优缺点？哪些情况下宜用全面调查？哪些情况下宜用抽样调查？

2. 为什么抽样调查可以作为了解总体的方法？为了使样本对总体有较好的代表性，抽样时需要注意什么？

3. 简单随机抽样有什么特点？用简单随机抽样抽取的样本是否一定具有代表性？请举例说明．

4. 扇形图、条形图、折线图、直方图和趋势图在描述数据方面各有什么特点？请举例说明如何根据问题的需要选取恰当的统计图表示数据．

复习题 12

复习巩固

1. 一家电影院为调查最近上映的电影的受欢迎程度，设计了如下调查问卷，调查对象是来电影院的人．这个问卷中存在哪些不足？

姓名__________　　年龄__________

1. 今天晚上你看的电影是____________________．

2. 电影好看吗？（　　）

（A）很好看　　（B）好看　　（C）不好看

3. 你买爆米花了吗？（　　）

（A）买了　　（B）没有

4. 请用十分制为电影打分，你认为你今晚观看的电影可以打____分．

5. 今晚的电影与你看的上一场电影相比怎么样？（　　）

（A）比上一场好看　　（B）差不多　　（C）没有上一场好看

2. 要调查下列问题，应采用全面调查还是抽样调查？说一说理由.

（1）某城市的空气质量；

（2）全国中学生的视力和用眼卫生情况；

（3）某批应聘人员的技术水平；

（4）某池塘中现有鱼的数量.

3. 下列调查的样本是否具有代表性？

（1）为了解全校同学喜爱课程的情况，对某班男同学进行调查；

（2）为了解某小区居民的防火意识，对你们班同学进行调查；

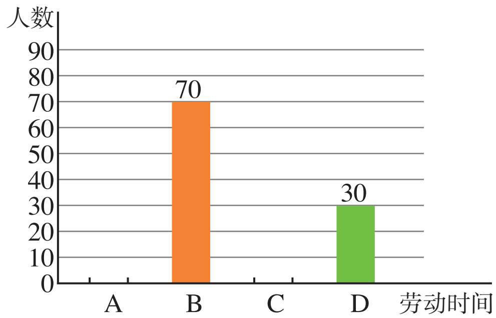
（3）为了解商场的平均日营业额，选在周末进行调查.

4. 校医务室调查了 30 名在校七年级男生的体重情况，发现他们的平均体重为 48 kg，你觉得可以用它作为七年级学生平均体重的估计吗？为什么？

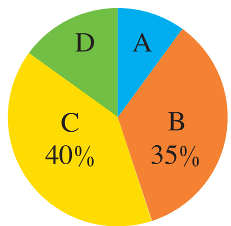
5. 为了解全校学生参与家务劳动的情况，某学校开展了“一周参与家务劳动时间”的问卷调查，根据收集到的数据，将劳动时间 x（单位：min）分为 A（$x<60$），B（$60\leqslant x<90$），C（$90\leqslant x<120$），D（$x\geqslant 120$）四组进行统计，并绘制了如图所示的不完整的条形图和扇形图. 请把统计图补充完整，并回答以下问题：

（1）这次一共调查了多少名学生？

（2）若这所学校共有 1 500 名学生，根据以上调查结果，估计这所学校学生中一周参与家务劳动时间不少于 90 min 的学生大约有多少人.



（1）



（2）

（第 5 题）

6. 学校想购买一批跑鞋供学生借用. 七年级（1）班的同学负责调查女生的鞋号，他们从全校各个年级随机抽查了 38 名女同学的鞋号，具体数据如下：

35	37	41	35	37	36	37	38	36	37
37	38	35	34	39	35	40	36	37	36
38	39	37	39	36	35	36	37	38	34
40	37	35	38	40	36	37	36		

（1）整理上面的数据，看一看穿不同鞋号的女生各有多少. 绘制合适的统计图，表示穿不同鞋号的女生占调查总人数的百分比.

（2）你认为七年级（1）班的同学会为学校购买女生的运动鞋提出什么建议？

7. 下表记录了 2013—2022 年我国高速铁路营业里程和客运量的数据.

年份	2013	2014	2015	2016	2017
营业里程/km	11 028	16 456	19 838	22 980	25 164
客运量/万人	52 962	70 378	96 139	122 128	175 216
年份	2018	2019	2020	2021	2022
营业里程/km	29 904	35 388	37 929	40 139	42 241
客运量/万人	205 430	235 833	155 707	192 236	127 533

选择合适的统计图，分别表示我国高速铁路营业里程和客运量的变化情况，并描述从图中读到的信息.

综合运用

8. 某市在实施居民用水定额管理前，对居民生活用水情况进行了调查. 下面是通过简单随机抽样调查，获得的 50 个家庭去年的月均用水量（单位：t）数据.

3.9	5.1	7.7	11.3	1.5	11.1	7.3	7.9	5.6	4.5
10.7	24.8	11.4	6.2	10.1	2.1	6.9	17.5	3.1	5.4
22.2	18.0	13.6	15.9	16.7	10.2	2.0	4.9	5.2	12.0
12.5	13.8	3.5	5.7	4.8	7.1	6.2	5.9	3.4	8.9
2.4	14.4	4.2	6.4	6.8	7.3	5.5	9.7	8.3	19.0

（1）选择合适的组距和组数，列出样本频数分布表，画出频数分布直方图. 从直方图中能得到什么信息？

（2）为了鼓励节约用水，要确定一个用水量的标准，超出这个标准的部分按 1.5 倍价格收费. 若要使 60%的家庭水费支出不受影响，这个标准应该定为多少？为什么？

9. 在相同的条件下，对同一型号的 30 辆汽车进行每百千米耗油试验，结果（单位：L）如下：

7.1	8.1	7.3	7.1	7.8	7.6	7.6	7.4	6.9	7.2
7.2	7.9	7.6	7.5	7.0	7.2	7.9	7.7	7.6	7.4
7.4	7.5	7.4	8.3	8.0	7.6	7.4	7.6	7.5	7.9

请统计分析这批汽车的耗油情况.

10. 通常来说，广告支出越多，商品销售收入越高. 下表记录了一家公司某产品的广告支出与销售收入的数据.

广告支出/万元	1	2	4	5	7
销售收入/万元	12	20	25	30	40

绘制趋势图描述销售收入随广告支出增加的变化趋势，并预测当广告支出为 8 万元时，销售收入是多少.

拓广探索

11. 阅读是人类获取知识、启智增慧、培养道德的重要途径，可以让人得到思想启发，树立崇高理想，涵养浩然之气. 请你设计一个调查方案，了解你所在学校同学课余阅读的情况，并比较男、女生在阅读爱好和阅读量上是否有差异.

人民教育出版社

综合与实践
白昼时长规律的探究

北京天安门广场上，五星红旗每天都会早晨升起，傍晚降落. 有同学可能会问：天安门广场上，每天国旗的升降时刻都是一样的吗？其实，天安门广场上每天升降旗的时刻并不是固定不变的，而是根据北京的日出、日落时刻变动的. 根据生活经验，我们知道：一年四季中白昼时长（白昼时长是指从日出到日落的时间长度）并不是固定不变的. 那么，一座城市每天的日出、日落时刻有什么规律呢？下面我们就来共同探究这个问题吧.

活动目标

1. 探究北京白昼时长的变化规律.

2. 探究不同纬度、经度地区白昼时长变化规律的差异，并用这些规律解决一些实际问题.

活动准备

1. 通过报刊、图书、网络等查阅资料，了解二十四节气；收集北京 2024 年全年日出、日落时刻的数据；收集北京、新疆阿图什、广东揭阳 2024 年二十四节气日的白昼时长数据.

2. 学习如何使用信息技术工具绘制简单的统计图.

活动任务

活动一　探究北京白昼时长的变化规律

通过查阅资料，可以收集到北京 2024 年全年日出、日落时刻的数据. 通过对数据的分析比较，可以发现不少有趣的规律，例如：

（1）1 月 12 日到 6 月 11 日，日出时刻由 7:36 逐渐提前到 4:45，平均每天

提前约 1 min 8 s；

（2）6 月 17 日到 12 月 29 日，日出时刻由 4:45 又逐渐推迟到 7:36，平均每天推迟约 53 s；

（3）1 月 1 日到 1 月 12 日和 12 月 29 日到 12 月 31 日，每天的日出时刻大约为 7:36，6 月 11 日到 6 月 17 日，每天的日出时刻大约为 4:45.

它们反映了北京日出时刻的部分变化规律. 那么，如何较为全面地刻画北京白昼时长的变化规律呢？我们知道，北京全年的日出、日落时刻数据繁多，能否选用其中一些具有代表性的数据来刻画呢？

我们知道，二十四节气日是气候变化的节点，北京日出、日落时刻以及白昼时长与它们可能有着密切联系. 二十四节气起源于我国黄河流域，是前人世代农耕劳作智慧的结晶，是我国传统文化在历法中的体现. 二十四节气的名称，含有气候变化、物候特点和农业生产活动等多种含义（表 1），2016 年，我国二十四节气被联合国教科文组织正式列入《人类非物质文化遗产代表作名录》.

表 1　二十四节气名称的含义

表示寒来暑往四季变化	立春、春分、立夏、夏至、立秋、秋分、立冬、冬至
象征气温变化	小暑、大暑、处暑、白露、寒露、霜降、小寒、大寒
反映降水	雨水、谷雨、小雪、大雪
反映物候现象或农事活动	惊蛰、清明、小满、芒种

下面，我们通过北京 2024 年二十四节气日的日出、日落时刻，来探究北京白昼时长的变化规律.

任务 1　整理数据

利用收集到的北京 2024 年全年日出、日落时刻的数据，计算北京 2024 年二十四节气日的白昼时长，完成表 2.

表 2　北京 2024 年二十四节气日白昼时长

节气	日期	日出时刻	日落时刻	白昼时长
小寒	1 月 6 日	7:36	17:04	9 h 28 min
大寒	1 月 20 日			
立春	2 月 4 日			
雨水	2 月 19 日			
惊蛰	3 月 5 日			

人民教育出版社

续表

节气	日期	日出时刻	日落时刻	白昼时长
春分	3 月 20 日			
清明	4 月 4 日			
谷雨	4 月 19 日			
立夏	5 月 5 日			
小满	5 月 20 日			
芒种	6 月 5 日			
夏至	6 月 21 日			
小暑	7 月 6 日			
大暑	7 月 22 日			
立秋	8 月 7 日			
处暑	8 月 22 日			
白露	9 月 7 日			
秋分	9 月 22 日			
寒露	10 月 8 日			
霜降	10 月 23 日			
立冬	11 月 7 日			
小雪	11 月 22 日			
大雪	12 月 6 日			
冬至	12 月 21 日			

任务 2　描述数据

利用信息技术工具绘制出北京 2024 年二十四节气日的日出、日落时刻的散点图.

任务 3　分析数据

你能推断北京 2024 年日出、日落时刻有什么规律吗？北京 2024 年中哪一天的白昼最长？这一天是否也是日出最早、日落最晚的一天？北京 2024 年白昼时长是如何变化的？请用数据和适当的统计图说明.

活动二　探究不同纬度、不同经度地区白昼时长的变化规律

每天的日出、日落时刻受地球的自转与公转影响. 同一日期，不同地点每天日出、日落的时刻各不相同；同一地点，日出、日落的时刻也随日期的变化而变化.

为了探究不同纬度和不同经度地区白昼时长的变化规律，我们选择北京

(基准城市)、新疆阿图什（与北京纬度大致相同但经度不同)、广东揭阳（与北京经度大致相同但纬度不同）三个城市，探究它们白昼时长的变化规律.

任务 1　比较研究

（1）收集北京、新疆阿图什、广东揭阳三地 2024 年二十四节气日的白昼时长数据. 观察这些数据，你能发现这三地的白昼时长是如何变化的吗？请用适当的统计图说明.

（2）观察统计图，你认为影响白昼时长变化的因素有哪些？这些因素又是如何影响白昼时长的？

（3）2024 年这三地的平均白昼时长是多少？这三地的白昼时长是否具有 12 h 附近的天数多，其他时长的天数少的特点？请用适当的统计图说明.

任务 2　日出、日落时刻与正午时刻的关系

当某地太阳高度达到一天中的最大值时，就是一天的正午时刻. 理论上，一个地区日出、日落时刻相对于当天的正午时刻应该是“对称”的（图 1)，于是就能得到一个简单的计算公式：

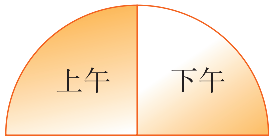


图 1

白昼时长＝(正午时刻－日出时刻)×2＝(日落时刻－正午时刻)×2.

通常情况下，公式中的“正午时刻”为当地的正午 12 时整. 根据上述计算公式，如果已知某地某天的日出时刻或日落时刻，就能推算出当天的白昼时长；反过来，如果已知此地某天的白昼时长，也能推算出当天的日出时刻与日落时刻.

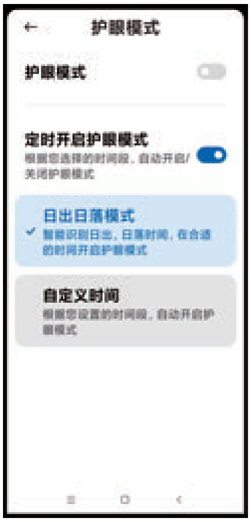
（1）根据以上公式，如果某地的白昼时长在某个阶段逐日变得越长时，那么此地的日出时刻与日落时刻在那个阶段会如何变化？为什么？

（2）类比上述计算方法，如果已知某地后一天的日出时刻或前一天的日落时刻，如何计算此地这两日之间的黑夜时长？

（3）观察表 2 收集的北京日出、日落时刻数据，我们发现，日出、日落时刻并不是关于北京时间正午 12 时整对称的（也就是说，正午时刻不是北京时间正午 12 时整），而是存在一定的误差. 请以小组为单位，从报刊、图书、网络等查阅资料或咨询专业人士，了解造成这种现象的原因.

活动三　有趣的护眼模式（选做）

近年来，近视已经成为影响青少年健康的重要问题，而手机、电脑等电子产品是造成青少年近视的主要原因之一. 为了尽量减少使用手机对眼睛带来的伤害，很多手机在系统里开发了护眼模式，这种护眼模式可以智能地识别日出、日落时刻.



任务　我们知道，各地每天的日出、日落时刻并不相同，而手机的使用者可能分布在全国乃至全世界不同的地方. 那么智能手机是如何智能地识别日出、日落时刻的变化呢？请你查阅相关资料，了解背后的道理吧.

活动过程

1. 组建合作团队

本次综合与实践活动需要团队协作. 在班级中组成 5～8 人一组的研究小组，每位同学参加其中一个小组，每个小组确定一名负责人.

2. 方案构思

小组成员进行充分的讨论与交流，集思广益，形成解决上述任务的方案.

3. 方案实施

按照小组设计的方案进行任务分工，使每位成员都有明确的任务. 根据规划的研究步骤实施，完成活动任务，形成研究报告.

4. 展示交流

制作向全班汇报的演示文稿，选出代表向全班同学展示本组的研究成果，分享实践过程中的活动经验、遇到的困难及其解决方法，反思活动中的不足.

活动评价

通过成果展示与交流，基于各组完成的研究报告，根据情况选择任务完成表、表现评分表、自我反思表等进行评价. 与老师和全班同学一起，通过质疑、辩论、评价，总结成果，分享体会，分析不足，开展自我评价、同学评价和教师评价，完成本次综合与实践活动.

后　记

本套教科书（七～九年级）由人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2022 年版）》编写.

本套教科书集中反映了基础教育课程改革的最新成果，总结了上一版《义务教育教科书　数学》的编写经验，凝聚了教育专家、学科专家、教材编写人员、教研人员及一线教师的集体智慧. 参加本套教科书统稿的还有薛彬、王光明，参加本册教科书统稿的还有陈清华，参加本册教科书编写讨论的还有陈晓娣、王翠巧. 本套教科书封面设计由中央美术学院设计团队完成，人民教育出版社设计部制作. 本册教科书版式设计为王俊宏，封面插图绘制为康鲁雷，内文插图绘制为王俊宏、张婷婷、康鲁雷. 我们感谢所有对教科书的编写、审读、试教、出版等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友.

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 新华社、国家卫星气象中心、视觉中国、IC photo、中新图片和张朝平等为本册教科书提供了图片素材. 对此，我们表示衷心的感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵的意见和建议. 我们将本着精益求精的态度，集思广益，不断修订，努力使教科书日趋完善.

联系方式
电　　话：010-58758319，58758866
电子邮箱：jcfk@pep.com.cn
中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

人民教育出版社
人民教育出版社

义 务 教 育 教 科 书

数 学

七年级 | 下册

YIWU JIAOYU JIAOKESHU

SHUXUE

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-38247-5